Universidad de Guanajuato

Introducción a los espacios de Bergman

T E S I S

Que para obtener el título de

Licenciado en Matemáticas

P R E S E N T A:

Alma Saraí Hernández Torres

Director de Tesis:

Dr. Fernando Galaz Fontes

GUANAJUATO, GTO AGOSTO 2014

Índice general

Agradecimientos

La fría belleza de las matemáticas se encuentra con el encanto de Guanajuato. El amanecer más hermoso saluda las montañas de Valenciana para iniciar el día en la biblioteca de CIMAT. Cuando llega el atardecer, los tonos dorados iluminan, como un milagro, callejones, tazas de café y hojas garabateadas de matemáticas. El tiempo terminó sumando cinco años.

Las exigencias de la licenciatura en matemáticas culminan con este trabajo de tesis. Los retos que se presentaron en la carrera fueron numerosos, pero al superarlos se convirtieron en lecciones. Esto fue posible por el apoyo de muchos. Las siguientes líneas son un reconocimiento, pequeño cuando se compara ante todo lo que me han dado.

Gracias a mis padres, Alejandro y Alma, por su amor incondicional. Sus palabras me han sustentado en esta aventura. Gracias a mi hermana Lizette, por encontrar la forma perfecta de animarme, molestarme y arrancar una sonrisa al mismo tiempo. Gracias a Lourdes Domínguez, por abrir las puertas de su casa y de su familia. Tu amistad es más preciosa que el oro.

Gracias mis profesores de la licenciatura, me dieron una base confiable para continuar mis estudios en matemáticas con confianza; gracias a los sinodales de esta tesis, Dres. Raúl Quiroga Barranco, Manuel Cruz López y Mónica Moreno Rocha, por sus valiosos comentarios y pronta disposición en un tiempo de entrega tan ajustado. En especial, agradezco al Dr. Fernando Galaz Fontes por su paciencia como profesor y asesor. Agradezco a CIMAT por la beca de estudios que me permitió estudiar en Guanajuato. Es un honor pertenecer a la comunidad CIMAT-DEMAT.

La vida es mucho mejor cuando tienes buenos amigos, en Guanajuato y en Guadalajara. Gracias por las bromas y las matemáticas, las sabrosas sobremesas, los planes para revolucionar las olimpiada de matemáticas, los partidos de fútbol y todo el tiempo en el café.

Sobre todo, gracias a Dios. Es por su gracia que todo lo anterior sucedió.

Guanajuato, Gto. 14 de agosto de 2014.

Introducción

En 1922, Stefan Bergman (1895 – 1977), matemático polaco-estadounidense, presentó en su tesis doctoral, *“Über die Entwicklung der harmonischen Funktionen der Ebene und des Raumes nach Orthogonalfunktione”*, el estudio de un núcleo de un operador integral, el cual sería una de sus mayores aportaciones a las matemáticas, y que actualmente se conoce como el núcleo de Bergman. Así inicia el estudio sistemático de los espacios de Bergman, tema que ha tenido importantes avances en los últimos años; tanto por los problemas relativos a las funciones que contienen dichos espacios, así como por los operadores que actúan en ellos.

Dado un dominio Ω del plano complejo, se le asocia el espacio de Bergman $A^2(\Omega)$, que consiste de las funciones analíticas y cuadrado-integrables respecto a la medida de Lebesgue. Este es un espacio de Hilbert, con producto interior

$$\langle f, g\rangle = \int_\Omega f\,\overline{g}\,dm.$$

El núcleo de Bergman es la única función $K : \Omega\times\Omega \to \mathbb{C}$ que satisface la fórmula reproductora: para cada $f \in A^2(\Omega)$ se tiene que

$$f(z) = \int_\Omega f(w)K(z,w)\,dm(w), \qquad \forall\, z \in \Omega. \tag{1}$$

Utilizando la función núcleo como herramienta principal, Bergman obtuvo resultados notables en la teoría de funciones conformes, y siguiendo ese método, también en ecuaciones diferenciales y en geometría diferencial. Bergman publicó, en 1950, la primera introducción a estos resultados, en la monografía *“The Kernel Function and Conformal Mapping”* [2].

La teoría moderna de los espacios de Bergman incluye la generalización a espacios de Banach. Dado $1 \leq p < \infty$, se define el espacio de Bergman $A^p(\Omega)$ como el subespacio de funciones analíticas en $L^p(\Omega)$. Naturalmente, se plantearon problemas para los espacios de Bergman que se habían resuelto exitosamente para otros espacios de funciones. Por ejemplo, la representación de su espacio dual $A^p(\Omega)^*$. En 1964, los matemáticos rusos V. P. Zaharjuta y V.I. Judovič publicaron en [10] que para los espacios de Bergman se presenta una situación similar a la de $L^p(\Omega)$, esto es para $1 < p < \infty$ y q su exponente conjugado, se cumple que $A^p(\mathbb{D})^* = A^q(\mathbb{D})$. En la década de los 70's se plantearon problemas muy interesantes, pero en el momento se pensaron intratables. Sin embargo, en los 90's floreció la teoría de espacios de Bergman, avanzando en las preguntas planteadas años atrás y encontrando conexiones con otras ramas del análisis. Entre los problemas que siguen abiertos, destaca la clasificación de los subespacios invariantes de $A^p(\mathbb{D})$. Un subespacio $V \subset A^p(\mathbb{D})$ se dice *invariante* en $A^p(\mathbb{D})$ si satisface que $zf(z) \in V$, para todo $f \in V$. La clasificación de los subespacios invariantes de $A^p(\mathbb{D})$ es un problema sumamente atractivo y difícil, como explican P. Duren y A. Schuster en [5]. Sobresale que H. Hedenmalm, S. Richter, y K. Seip señalaron en [7], que entender los subespacios invariantes de $A^2(\mathbb{D})$ permitiría resolver el famoso problema del subespacio invariante en espacios de Hilbert.

Esta tesis de licenciatura expone los primeros resultados que se presentan en la teoría de los espacios de Bergman, y que son fundamentales para el desarrollo posterior. Su objetivo principal es introducir el tema de manera sencilla, limitándose a demostraciones elementales y una presentación autocontenida. De esta forma, buscamos que el trabajo sea accesible para un estudiante que haya tomado cursos introductorios de análisis funcional, teoría de la medida y variable compleja.

Una de las características más atractivas de los espacios de Bergman es la interacción entre análisis funcional, teoría de la medida y variable compleja. Por ello, los dos primeros capítulos de este trabajo dan un repaso de los resultados que se utilizan de tales áreas. El capítulo 1 primero presenta a las funciones analíticas, donde destacan dos herramientas: la fórmula integral de Cauchy y la representación local como serie de potencias. En la última sección, se enuncian las propiedades geométricas del disco unitario, y su relación con dominios propios y simplemente conexos. Aparece entonces uno de los teoremas más influyentes en este trabajo, el teorema del mapeo de Riemann, el cual no se demostrará. Por su parte, en el capítulo 2 se revisa la teoría básica de espacios normados; en particular, su estructura y los operadores lineales que actúan en ellos. Se distingue a los espacios de Hilbert (que tienen un importante papel en la primera parte del estudio de los espacios de Bergman) principalmente por el concepto de base ortonormal, así como por el teorema de la descomposición ortogonal y el teorema de representación de Riesz.

Como se ha mencionado anteriormente, el espacio de Bergman $A^p(\Omega)$ es un subespacio de $L^p(\Omega)$. Dado que $A^p(\Omega)$ hereda propiedades de $L^p(\Omega)$, aprovechamos el capítulo 3 para estudiar a los espacios $L^p(\Omega)$ con mayor detalle. Aunque nuestro interés está en la medida de Lebesgue, conviene trabajar de manera más general y lo hacemos en el caso de una medida abstracta y finita μ. La primera parte del capítulo 3 menciona los conceptos esenciales de teoría de la medida para la construcción del espacio $L^p(\mu)$. El primer objetivo es demostrar que $L^p(\mu)$ es, en efecto, un espacio de Banach. El segundo objetivo es dar una representación del espacio dual: para $1 < p < \infty$ y q su exponente conjugado, $L^p(\mu)^*$ y $L^q(\mu)$ son isométricamente isomorfos. Para establecer esto se necesita el teorema de Radon-Nikodym, el cual se prueba con detalle.

En el capítulo 4 se entra propiamente al tema de los espacios de Bergman. Una vez que se prueba que $A^p(\Omega)$ es un espacio de Banach, seguimos el trabajo de S. Bergman y se estudian los espacios de Hilbert $A^2(\Omega)$. La propiedad fundamental para la construcción del núcleo es la continuidad de los funcionales de evaluación en $A^2(\Omega)$. Usando el teorema de representación de Riesz, se obtiene entonces el núcleo de Bergman K, de tal forma que es la única función que satisface la fórmula reproductora (1). Como se ha indicado previamente, el núcleo de Bergman es el principal objeto de estudio en $A^2(\Omega)$. Además de señalar sus propiedades elementales, se obtiene una una representación del núcleo de Bergman de Ω en términos de una base ortonormal de $A^2(\Omega)$. Asimismo, se encuentra que el núcleo de Bergman proporciona la solución de algunos problemas de minimización en $A^2(\Omega)$. Una vez establecidas las generalidades sobre el núcleo de Bergman, pasamos al ejemplo más importante: el espacio de Bergman del disco unitario, $A^2(\mathbb{D})$. En este espacio, la familia de monomios $\{z^n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ es un conjunto ortogonal. Normalizando, se calcula entonces una base ortogonal de $A^2(\mathbb{D})$. Como consecuencia de la representación del núcleo en términos de ella, se obtiene que el núcleo de Bergman del disco unitario es la función

$$K(z,w) = \frac{1}{\pi(1 - z\,\overline{w})^2}, \qquad \forall\, z, w \in \mathbb{D}.$$

Para concluir el estudio de $A^2(\Omega)$, consideramos su aplicación en la teoría de transformaciones conformes. Si Ω y Θ son dominios conformemente equivalentes, entonces sus respectivos espacios de Bergman, $A^2(\Omega)$ y $A^2(\Theta)$ son isométricamente isomorfos. Además, el núcleo de Bergman de Ω se expresa en términos del núcleo de Bergman de Θ. Por el teorema del mapeo de Riemann, el ejemplo del disco unitario cobra mayor importancia a partir de la invariancia conforme, pues los resultados que se obtuvieron para $A^2(\mathbb{D})$ se trasladan a dominios propios y simplemente conexos. Cuando se conoce la biyección conforme $\varphi : \Omega \to \mathbb{D}$, basta sustituir para conseguir una expresión explícita del núcleo de Bergman de Ω. Es sobresaliente que también se puede proceder en la dirección inversa, pues en general, la transformación dada por el teorema del mapeo de Riemann no se conoce. Una de las consecuencias más importantes de la invariancia conforme, que señaló por primera vez S. Bergman, es una expresión para la biyección conforme $\varphi : \Omega \to \mathbb{D}$ en términos del núcleo de Bergman de Ω.

La segunda parte del capítulo 4 se concentra en el espacio de Bergman del disco unitario $A^p(\mathbb{D})$, para $1 \leq p < \infty$. Lo primero que se demuestra es la densidad de los polinomios en $A^p(\mathbb{D})$, que resulta ser muy útil en lo siguiente. En la parte correspondiente al espacio $A^2(\mathbb{D})$, se observa que la proyección ortogonal de $L^2(\mathbb{D})$ sobre $A^2(\mathbb{D})$ es el operador integral inducido por el núcleo de Bergman. En el caso de los espacios de Banach no disponemos la fórmula reproductora, pero si operador integral inducido por el núcleo de Bergman,

$$Bf(z) = \int_{\Omega} \frac{f(w)}{\pi(1 - z\,\overline{w})^2}\, dm(w), \qquad \forall\, z \in \Omega,\ f \in L^p(\mathbb{D}). \tag{2}$$

La integral en 2 existe cuando $f \in L^1(\mathbb{D})$. Entonces B es un operador de $L^p(\mathbb{D})$ en $F(\mathbb{D}, \mathbb{C})$, el conjunto de funciones $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$, para $1 \leq p \leq \infty$. Si $1 < p < \infty$, se prueba que si $f \in L^p(\mathbb{D})$, entonces $Bf \in A^p(\mathbb{D})$; asimismo, que Bf es un operador lineal acotado y que $Bg = g$, para todo $g \in A^p(\mathbb{D})$. Por lo tanto, $B : L^p(\mathbb{D}) \to L^p(\mathbb{D})$ muestra ser una proyección de $L^p(\mathbb{D})$ sobre $A^p(\mathbb{D})$.

Para finalizar, se obtiene una representación del espacio dual de $A^p(\mathbb{D})$, a partir de la representación para $L^p(\mathbb{D})^*$ y de la existencia de la proyección de Bergman. Se demuestra que, para $1 < p < \infty$ con exponente conjugado q, $A^p(\mathbb{D})^*$ y $A^q(\mathbb{D})$ son isomorfos.

Capítulo 1

Funciones analíticas

1.1. Definiciones y notación

El *plano complejo* es el conjunto

$$\mathbb{C} = \{x + iy \,|\, x, y \in \mathbb{R}\},$$

donde $i^2 = -1$. Dado un número complejo $z \in \mathbb{C}$, existen $x, y \in \mathbb{R}$ tales que

$$z = x + iy.$$

Escribimos $\operatorname{Re} z := x$, la *parte real de* x e $\operatorname{Im} z := y$, la *parte imaginaria de* x. El *módulo* de z es

$$|z| = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2}.$$

Sean $z_0 \in \mathbb{C}$ y $r > 0$. Recordemos que el *disco abierto con centro en* z_0 *y radio* r es

$$D_r(z_0) := \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z - z_0| < r\}.$$

Su cerradura es el *disco cerrado* correspondiente, que es

$$\overline{D_r}(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z - z_0| \leq r\},$$

mientras que su frontera es la *circunferencia con centro en* z_0 *y radio* r, que se describe como

$$C_r(z_0) := \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z - z_0| = r\}.$$

Si z_0 es el origen, simplemente escribimos C_r y D_r, respectivamente.

1.2. La derivada compleja

Sea $U \subset \mathbb{C}$ un abierto. La derivada de una función $f : U \to \mathbb{C}$ en $z_0 \in U$ existe, si existe el límite del cociente

$$\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h},$$

cuando $h \to 0$. En ese caso, definimos la *derivada de f en z_0* por

$$f'(z_0) := \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Una función con valores complejos f es *holomorfa en un conjunto abierto* $U \subset \mathbb{C}$ si la derivada $f'(z_0)$ existe para todo $z_0 \in U$. Si f es holomorfa en $\mathbb{C}$, decimos entonces que f es una *función entera*.

Denotaremos el conjunto de funciones holomorfas en un conjunto abierto $U \subset \mathbb{C}$ por $H(U)$.

Proposición 1.2.1. *Sea $U \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto.*

I. Si $f, g \in H(U)$, entonces $f+g \in H(U)$ y $fg \in H(U)$. Además, si $g(z) \neq 0$, $\forall\, z \in U$, entonces $f/g \in H(U)$.

II. La composición de funciones holomorfas es holomorfa. Esto es, si $f \in H(U)$, $g \in H(V)$, y $f(U) \subset V$, entonces $g \circ f \in H(U)$.

Sumado a esto, las reglas usuales de derivación son válidas.

Claramente, la identidad y las funciones constantes son enteras. De la proposición anterior se sigue entonces que cualquier función polinomial con coeficientes en $\mathbb{C}$:

$$p(z) = a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0,$$

también es una función entera.

Para terminar la presentación de las propiedades básicas de la derivada compleja, el siguiente teorema presenta la relación entre esta y las derivadas parciales.

Teorema 1.2.1. *Sea $U \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto y $f : U \to \mathbb{C}$ una función holomorfa con $u = \operatorname{Re} f$ y $v = \operatorname{Im} f$. Entonces f satisface las* ecuaciones de Cauchy-Riemann*, que son,*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Además,

$$f' = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}.$$

1.3. Integral de Cauchy

Una *curva* es una función continua $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$, con $a < b$. Denotamos la imagen de γ por γ^*. En esta situación también diremos que γ es una *parametrización* de γ^*. La curva γ es *suave* si es de clase C^1 y $\gamma'(t) \neq 0$, $\forall\, t \in [a, b]$. De la misma manera, una curva γ es *suave a pedazos* si existe una partición $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b$, para la cual γ es suave en los intervalos $[a_k, a_{k+1}]$.

Definición 1.3.1. Sea $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ una curva suave y $f : \gamma^* \to \mathbb{C}$ una función continua. Definimos la *integral de f a lo largo de γ* por

$$\int_{\gamma^*} f(z)\, dz := \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\, dt.$$

Si γ es suave a pedazos respecto a la partición $a = a_0 < a_1 \ldots < a_n = b$ de $[a, b]$, y f es continua en γ^*, entonces

$$\int_{\gamma^*} f(z)\, dz := \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(\gamma(t))\gamma'(t)\, dt.$$

Ejemplo 1.3.1. Sea z_0 un punto, $r > 0$ y f una función continua en $C_r(z_0)$. Al usar la notación $\int_{C_r(z_0)} f(z)dz$, nos estaremos refiriendo a la integral $\int_{\gamma^*} f(z)dz$, donde $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ es la curva suave dada por

$$t \mapsto z_0 + re^{it}, \qquad \forall\, t \in [0, 2\pi].$$

Ejemplo 1.3.2. Dados tres puntos a, b y c, el *triángulo cerrado con vértices a, b y c* es el conjunto

$$T = \{\lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 c \,|\, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0,\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1\}.$$

Su frontera se puede parametrizar de varias formas, lo cual da lugar a la frontera orientada ∂T. En adelante entenderemos por ∂T la curva suave a pedazos:

$$\partial T(t) := \begin{cases} a + (b - a)t, & \text{si } 0 \leq t \leq 1, \\ b + (c - b)(t - 1), & \text{si } 1 \leq t \leq 2, \\ c + (a - c)(t - 2), & \text{si } 2 \leq t \leq 3. \end{cases}$$

Teorema 1.3.1 (de Cauchy para un triángulo)**.** *Sea $U \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto. Si f es una función holomorfa en U, entonces para todo triángulo cerrado $T \subset U$ tenemos que*

$$\int_{\partial T^*} f(z)\, dz = 0.$$

Teorema 1.3.2 (Fórmula integral de Cauchy para una circunferencia)**.** *Sea $U \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto y $f : U \to \mathbb{C}$ una función holomorfa. Si $z_0 \in U$ y $\overline{D_r(z_0)} \subset U$, entonces*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r(z_0)} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz.$$

Teorema 1.3.3 (Morera)**.** *Sea $U \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto. Si f es una función continua en U tal que para todo triángulo cerrado $T \subset U$*

$$\int_{\partial T^*} f(z)\, dz = 0,$$

entonces f es holomorfa en U.

1.4. Convergencia de una sucesión de funciones

Dado un conjunto arbitrario $A \subset \mathbb{C}$ y una sucesión de funciones

$$f_n : A \to \mathbb{C}, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

consideraremos su convergencia.

Si para cada $x \in A$ tenemos que la sucesión $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ converge, decimos que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge*, o bien, *converge puntualmente* a la función definida por

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), \qquad \forall\, x \in A.$$

Desafortunadamente, el límite puntual no hereda algunas propiedades de la sucesión de funciones, por ejemplo la continuidad. Para obtener resultados de este tipo, necesitamos una convergencia de naturaleza "global". Consideremos entonces, para $B \subset A$ y $f : A \to \mathbb{C}$,

$$\|f\|_{\infty,B} := \sup\{|f(x)| \mid x \in B\}.$$

Definición 1.4.1. Sea $A \subset \mathbb{C}$.

I. Convergencia uniforme.

   i) Una sucesión de funciones $f_n : A \to \mathbb{C}$ *converge uniformemente* en $B \subset A$ a $f : B \to \mathbb{C}$, si para cada $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que,

   $$\|f - f_n\|_{\infty,B} < \epsilon, \qquad \forall\, n \geq N.$$

   ii) La sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es *uniformemente de Cauchy* en $B \subset A$ si para cada $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

   $$\|f_n - f_m\|_{\infty,B} \leq \epsilon, \qquad \forall\, n, m \geq N.$$

II. Convergencia uniforme en compactos.

   i) Una sucesión de funciones $f_n : A \to \mathbb{C}$ converge a la función $f : A \to \mathbb{C}$ *uniformemente en compactos* si para todo subconjunto compacto $K \subset A$, $\{f_n\}$ converge uniformemente en K a f.

   ii) La sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es *uniformemente de Cauchy en compactos de* A si para todo conjunto compacto $K \subset A$, la sucesión de funciones restringidas a K, $\{f_n|_K\}$, es uniformemente de Cauchy.

Proposición 1.4.1. *Sea $A \subset \mathbb{C}$ y $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión uniformemente de Cauchy en compactos de A. Entonces existe $f : A \to \mathbb{C}$ tal que $f_n \to f$ uniformemente en compactos de A.*

Demostración. En el compacto $K := \{x\}$ tenemos que

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_{\infty,K}. \tag{1.1}$$

Como $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es uniformemente de Cauchy en K, de la ecuación anterior se sigue que $\{f_n(x)\}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{C}$. De la completez de $\mathbb{C}$ se sigue que $\{f_n\}$ converge puntualmente a

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), \qquad \forall\, x \in A.$$

Para comprobar que $f_n \to f$ uniformemente en compactos de A, fijemos un compacto $K \subset A$. Dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m > N$, entonces

$$\|f_n - f_m\|_{\infty,K} \leq \epsilon.$$

Haciendo $m \to \infty$ se sigue lo deseado. □

Teorema 1.4.1 (Teorema de continuidad de Weierstrass)**.** *Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones continuas en un conjunto $A \subset \mathbb{C}$. Si $f_n \to f$ uniformemente en A, entonces f es continua en A.*

Corolario 1.4.1. *Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones continuas en un abierto $U \subset \mathbb{C}$. Si $f_n \to f$ uniformemente en compactos de U, entonces f es continua en U.*

Demostración. Sea $x \in U$ y tomemos $r > 0$ tal que $\overline{D_r(x)} \subset U$. Dado que $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones continuas y $f_n \to f$ uniformemente en $\overline{D_r(x)}$, entonces f es continua en $\overline{D_r(x)}$, de lo cual se sigue lo deseado. □

Proposición 1.4.2. *Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones holomorfas en un abierto $U \subset \mathbb{C}$. Si $f_n \to f$ uniformemente en compactos de U, entonces f es holomorfa en U.*

Demostración. Primeramente observemos que la convergencia uniforme en compactos implica que f es continua.

Sea $T \subset U$ un triángulo cerrado. Puesto que T es un conjunto compacto, la sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente en ∂T^*. Esto implica que

$$\int_{\partial T^*} f(z)\, dz = \lim_{n\to\infty} \int_{\partial T^*} f_n(z)\, dz. \tag{1.2}$$

Por otra parte, cada f_n es holomorfa en U. Por el teorema de Cauchy, de (1.2) se sigue que

$$\int_{\partial T^*} f(z)\, dz = 0.$$

Utilizando el teorema de Morera obtenemos lo afirmado. □

1.5. Series de potencias

Una serie de potencias alrededor de $z_0 \in \mathbb{C}$ es una serie de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n. \tag{1.3}$$

La convergencia de la serie de potencias (1.3) se puede estudiar a partir de sus coeficientes. En esta dirección, definimos su *radio de convergencia* por

$$r := 1/\lim_{n\to\infty}\sup\left(|a_n|^{1/n}\right),$$

donde interpretamos $1/0 := \infty$ y $1/\infty := 0$. En efecto, r determina un disco abierto de convergencia, como lo precisa la siguiente proposición.

Proposición 1.5.1. *Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ una serie de potencias y r su radio de convergencia. Entonces, en el disco $D_r(z_0)$ la serie converge absolutamente y uniformemente en compactos. Por otra parte, la serie diverge en $\mathbb{C}\setminus\overline{D_r(z_0)}$.*

Una función $f : U \to \mathbb{C}$ es *analítica* si en U tiene localmente una *representación en serie de potencias.* Esto es, si para cada $z_0 \in U$ existe $r > 0$ tal que $D_r(z_0) \subset U$ y

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n, \qquad \forall z \in D_r(z_0).$$

Teorema 1.5.1. *Si $f : U \to \mathbb{C}$ es analítica, entonces f es holomorfa en U. Además, si $D_r(z_0) \subset U$ y*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n, \qquad \forall\, z \in D_r(z_0), \tag{1.4}$$

entonces

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n(z-z_0)^{n-1}, \qquad \forall\, z \in D_r(z_0).$$

Como consecuencia, los coeficientes en (1.4) *están dados por,*

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \qquad \forall\, n \geq 0.$$

La serie en (1.4) *es conocida como la* serie de Taylor de f alrededor de z_0.

Una consecuencia importante de la fórmula integral de Cauchy es que toda función holomorfa es analítica, como se indica a continuación.

Teorema 1.5.2. *Si f es una función holomorfa en U, entonces f es analítica.*

Además, si $z_0 \in U$ y $R = \operatorname{dist}(z_0, \mathbb{C}\setminus U)$, entonces la expansión (1.4) *es válida en $D_R(z_0)$. La serie de Taylor de f converge absolutamente y uniformemente en compactos de $D_R(z_0)$.*

De los teoremas 1.5.1 y 1.5.2 concluimos que las clases de funciones holomorfas y analíticas coinciden. Por lo cual, en lo sucesivo únicamente haremos referencia a las funciones analíticas.

1.6. El disco unitario

Entre los subconjuntos abiertos y acotados del plano complejo, el más importante probablemente es el disco unitario $D_1(0)$, que denotaremos por $\mathbb{D}$.

Debido a la simplicidad del disco unitario, disponemos de fuertes herramientas para trabajar en él. Por ejemplo, en la integración, el cambio de variable a coordenadas polares; o bien, la representación de funciones analíticas en el disco es sencilla, como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.6.1. Sea $f \in H(\mathbb{D})$. De acuerdo al teorema 1.5.2, f es analítica en $\mathbb{D}$, y podemos desarrollarla alrededor de $z_0 = 0$ en todo el disco abierto:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \qquad \forall\, z \in \mathbb{D},$$

donde $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$, $\forall\, n \geq 0$.

Si un conjunto Ω se puede deformar en el disco unitario de forma "holomorfa", es natural pensar que Ω y $\mathbb{D}$ son equivalentes. Concretaremos esta idea al definir más adelante la equivalencia conforme, que permite transferir propiedades del disco unitario a Ω. Se vuelve entonces de interés caracterizar a tales dominios equivalentes. Para ello es necesario introducir conceptos que tienen un papel central en la geometría del disco unitario, y en particular, son fundamentales en la caracterización de los dominios equivalentes al disco. Lo cual se logra mediante el teorema del mapeo de Riemann.

Definición 1.6.1. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$.

I. El conjunto Ω es *conexo* si no existen dos abiertos disjuntos U y V tales que $\Omega \subset U \cup V$ y $\Omega \cap U$, $\Omega \cap V \neq \emptyset$.

II. El conjunto Ω es un *dominio* si es no-vacío, abierto y conexo. Decimos que Ω es un *dominio propio* si además es distinto de $\mathbb{C}$.

Para distinguir propiedades geométricas de un conjunto, las curvas resultarán muy útiles, pues usualmente es fácil describirlas.

Definición 1.6.2. Un conjunto $A \subset \mathbb{C}$ es *conexo por trayectorias* si para cualesquier $x, y \in A$, existe una curva $\alpha : [0,1] \to A$ que *conecta* a x con y, es decir, tal que $\alpha(0) = x$ y $\alpha(1) = y$.

Como el nombre lo sugiere, todo conjunto conexo por trayectorias es conexo.

En la recta real todo subconjunto conexo es un intervalo. Por su parte, el plano complejo tiene mayor variedad de subconjuntos conexos; por ejemplo, estos pueden tener agujeros. Es evidente que el disco unitario no contiene agujeros, y la intuición sugiere que un conjunto equivalente a $\mathbb{D}$ tampoco los tiene.

Geométricamente, sabemos que existe un agujero cuando una curva cerrada lo rodea, y esta curva no se puede transformar continuamente, dentro del subconjunto, a un punto. Para precisar esta idea, se introduce el concepto de homotopía. Recordemos que una curva $\alpha : [0,1] \to \mathbb{C}$ es una *curva cerrada* si $\alpha(0) = \alpha(1)$.

Definición 1.6.3. Sea $A \subset \mathbb{C}$ y $\alpha_0 : [0,1] \to A$, $\alpha_1 : [0,1] \to A$ dos curvas. Decimos que α_0 y α_1 son *homotópicas* si existe una función continua $H : [0,1] \times [0,1] \to A$ tal que

$$H(s,0) = \alpha_0(s), \qquad H(s,1) = \alpha_1(s), \qquad H(0,t) = H(1,t), \tag{1.5}$$

para todo $s \in [0,1]$ y $t \in [0,1]$. A la función H se le conoce como *homotopía.*

Sea $A \subset \mathbb{C}$ un conjunto conexo. Si toda curva cerrada en A es homotópica a una curva constante, entonces A es *simplemente conexo.*

Confirmando la intuición inicial, la conexidad y la conexidad simple son invariantes topológicos, como lo enuncia la siguiente proposición.

Proposición 1.6.1. *Sean Ω_1 y Ω_2 dos subconjuntos homeomorfos del plano complejo, es decir, tales que existe un homeomorfismo $f : \Omega_1 \to \Omega_2$. Si Ω_1 es conexo y simplemente conexo, entonces Ω_2 también lo es.*

Los conceptos de conexidad y de conexidad simple son muy importantes en la teoría de funciones analíticas, según se puede apreciar en los siguientes dos teoremas.

Teorema 1.6.1 (del mapeo abierto)**.** *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un dominio y f una función analítica en Ω. Si f no es constante, entonces $f(\Omega)$ es un conjunto abierto.*

Teorema 1.6.2 (de la antiderivada)**.** *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un dominio simplemente conexo. Si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es analítica, entonces existe una función analítica $F : \Omega \to \mathbb{C}$ tal que*

$$F'(z) = f(z), \qquad \forall\, z \in \Omega.$$

Decimos entonces que F es la antiderivada *de f en Ω. Además, esta es única salvo por la adición de una constante.*

Asimismo, la conexidad simple otorga conclusiones más generales para teoremas ya conocidos.

Teorema 1.6.3 (de Cauchy)**.** *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un dominio simplemente conexo. Si f es una función analítica en Ω, entonces para toda curva cerrada α en Ω, tenemos que*

$$\int_{\alpha^*} f(z)\, dz = 0.$$

Observemos que las nociones definidas anteriormente dependen de la existencia de alguna curva entre dos puntos dados. Por lo cual, una propiedad deseable para un conjunto es que tales curvas existan. Tal es el caso de los conjuntos convexos, que definiremos a continuación en su contexto más general.

Definición 1.6.4. En un espacio vectorial E, un conjunto $A \subset E$ es *convexo* si, para cualesquier $x, y \in A$ y $t \in [0,1]$, tenemos que $tx + (1-t)y \in A$. En otras palabras, la función que parametriza el segmento de recta entre x y y:

$$\alpha(t) = tx + (1-t)y, \qquad \forall\, t \in [0,1],$$

satisface que $\alpha^* \subset A$.

Ejemplo 1.6.2. Si $A \subset \mathbb{C}$ es convexo, entonces A es conexo y simplemente conexo.

En efecto, que A sea convexo implica que es conexo por trayectorias. Ahora, sea $\alpha : [0,1] \to A$ una curva cerrada. Consideremos la función $H : [0,1] \times [0,1] \to A$ dada por

$$H(s,t) = t\alpha(0) + (1-t)\alpha(s), \qquad \forall\, t, s \in [0,1].$$

Notemos que H es continua y satisface (1.5), así que es una homotopía. Por lo tanto, α es homotópica a la curva constante en $\alpha(0)$, lo cual prueba que A es simplemente conexo.

Para el caso del disco unitario, tomemos $x, y \in \mathbb{D}$. Si $t \in [0,1]$, tenemos que

$$|tx + (1-t)y| \leq t\,|x| + (1-t)\,|y| < 1.$$

Esto muestra que $tx+(1-t)y \in \mathbb{D}$, entonces $\mathbb{D}$ es convexo. De acuerdo al ejemplo anterior, se sigue que $\mathbb{D}$ es un dominio simplemente conexo.

Definición 1.6.5. Sea $U \subset \mathbb{C}$ un abierto. Diremos que una función $f : U \to \mathbb{C}$ es *conforme* si f es holomorfa y $f'(x) \neq 0$, $\forall x \in U$.

Dos dominios Ω_1 y Ω_2 son *conformemente equivalentes* si existe una biyección conforme entre ellos, $\phi : \Omega_1 \to \Omega_2$.

Ejemplo 1.6.3. El teorema de Liouville afirma que si una función es entera y acotada, entonces es constante. De lo cual, se sigue que no existe un mapeo conforme $f : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$, y concluimos que $\mathbb{D}$ y $\mathbb{C}$ *no* son conformemente equivalentes.

Ejemplo 1.6.4. Sea $\Omega = \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$. Consideremos la curva suave $\gamma : [0, 2\pi] \to \Omega$ dada por

$$t \mapsto 2\mathrm{e}^{it}, \qquad \forall\, t \in [0, 2\pi].$$

La función $1/z$ es analítica en Ω, y

$$\int_{\gamma^*} \frac{1}{z}\, dz = 2\pi i.$$

Como la integral no es cero, por la contrapositiva del teorema 1.6.3 Ω no es simplemente conexo. Por lo tanto, Ω no es conformemente equivalente con el disco unitario.

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto conformemente equivalente con $\mathbb{D}$, es decir, existe una biyección conforme $f : \Omega \to \mathbb{D}$. Del ejemplo 1.6.3 sabemos que Ω es un subconjunto propio. Y puesto que f es un homeomorfismo, por la proposición 1.6.1 concluimos que Ω es un dominio propio simplemente conexo. El teorema del mapeo de Riemann indica que el recíproco es cierto.

Teorema 1.6.4 (del mapeo de Riemann). *Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es un dominio propio y simplemente conexo, entonces Ω es conformemente equivalente con $\mathbb{D}$. Además, si fijamos $z_0 \in \Omega$, entonces existe una única biyección conforme $\varphi : \Omega \to \mathbb{D}$ tal que $\varphi(z_0) = 0$ y $\varphi'(z_0) > 0$.*

Ejemplo 1.6.5. El *semiplano superior* es el conjunto

$$\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \,|\, \operatorname{Im} z > 0\}.$$

Claramente, $\mathbb{H}$ es un abierto propio y convexo, y por ende, el semiplano superior es un dominio propio y simplemente conexo. Luego, el teorema del mapeo de Riemann implica que $\mathbb{H}$ y $\mathbb{D}$ son uniformemente equivalentes. Este es un caso clásico para el cual se puede dar una biyección conforme entre los dominios. Veamos que la *transformación de Cayley*:

$$\varphi(z) := \frac{i-z}{i+z}, \qquad \forall\, z \in \mathbb{H},$$

es una biyección conforme entre $\mathbb{H}$ y $\mathbb{D}$.

Dado que $|i+z| > |i-z|$, para todo $z \in \mathbb{H}$, entonces $|\varphi| < 1$. Así que $\varphi : \mathbb{H} \to \mathbb{D}$. Notemos que φ es analítica, por ser una función racional. Además,

$$\varphi'(z) = -\frac{2i}{(i+z)^2} \neq 0, \qquad \forall\, z \in \mathbb{H}.$$

Por lo tanto, $\varphi : \mathbb{H} \to \mathbb{D}$ es una transformación conforme. Para probar que φ también es una biyección, demos su inversa. Consideremos a la transformación

$$\psi(w) := i\,\frac{1-w}{1+w}, \qquad \forall\, w \in \mathbb{D}.$$

Tomemos $w = u + iv \in \mathbb{D}$, entonces

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im}(\psi(w)) &= \operatorname{Re}\left(\frac{1-u-iv}{1+u+iv}\right)\\
&= \operatorname{Re}\left(\frac{(1-u-iv)(1+u-iv)}{(1+u)^2+v^2}\right)\\
&= \frac{1-u^2-v^2}{(1+u)^2+v^2} > 0,
\end{aligned}$$

pues $|w| < 1$. Entonces $\psi : \mathbb{D} \to \mathbb{H}$. Finalmente, tenemos que para todo $z \in \mathbb{H}$ y $w \in \mathbb{D}$:

$$\varphi(\psi(w)) = w, \qquad \psi(\varphi(z)) = z.$$

Así, concluimos que $\varphi : \mathbb{H} \to \mathbb{D}$ es una biyección conforme.

En general, dado un dominio propio y simplemente conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$, el cálculo explícito del mapeo conforme entre Ω y el disco unitario es complicado. Al estudiar los espacios de Bergman, veremos que aparece una función, el núcleo de Bergman, que proporciona información muy importante sobre dicho mapeo.

Capítulo 2

Espacios normados

La estructura algebraica en la que trabajamos es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, donde $\mathbb{K}$ es $\mathbb{R}$ o bien, $\mathbb{C}$. La función norma induce una topología, lo que relaciona las estructuras algebraica y topológica.

2.1. Topología

Definición 2.1.1. Sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Una *norma* en X es una función $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ que satisface lo siguiente, para $x, y \in X$ y $\lambda \in \mathbb{K}$,

I. $\|x\| \geq 0$ y $\|x\| = 0$ si, y sólo si, $x = 0$;

II. $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$; y

III. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Un espacio vectorial X provisto de una norma, denotada por $\|\cdot\|_X$ o simplemente por $\|\cdot\|$, es un *espacio normado*. A sus elementos se les suele llamar *vectores*. La norma induce la métrica

$$d(x, y) = \|x - y\|, \qquad \forall\, x, y \in X,$$

y dotamos al espacio X de la topología métrica. A continuación describimos esta topología en términos de la norma.

En lo que resta de este capítulo, X será siempre un espacio normado.

Definición 2.1.2. Sean $x_0 \in X$. La *bola abierta con centro en x_0 y radio $r > 0$* es

$$V_r(x_0) := \{y \in X \mid \|y - x_0\| < r\},$$

y la *bola cerrada con centro en x_0 y radio $r > 0$* es

$$B_r(x_0) := \{y \in X \mid \|y - x_0\| \leq r\}.$$

La bola cerrada con centro en 0 y radio 1 se denotará por B_X.

Definición 2.1.3. Un conjunto $A \subset X$ es *abierto* si para todo $a \in A$ existe $r > 0$ tal que $V_r(a) \subset A$. Mientras que un conjunto $B \subset X$ es *cerrado* si su complemento $B^c := X \setminus A$ es abierto.

Como lo sugieren sus nombres, la bola abierta es un conjunto abierto y la bola cerrada es un conjunto cerrado.

En un espacio normado, las propiedades topológicas se pueden caracterizar en términos de sucesiones.

Definición 2.1.4. Sea X un espacio normado.

I. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X. Diremos que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge* a $x \in X$ si $\|x_n - x\| \to 0$. En este caso llamamos a x el *límite* de la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

II. Sea $A \subset X$. El punto $x \in X$ pertenece a la *cerradura de* A si x es el límite de una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en A. Denotamos la cerradura de A por $\overline{A}$.

Observemos que la cerradura de un conjunto es un conjunto cerrado.

Definición 2.1.5. Decimos que un conjunto $A \subset X$ es *denso en* X si $X = \overline{A}$.

El espacio normado X es *separable* si existe una sucesión de elementos del espacio que sea densa en X.

La separabilidad en un espacio normado es una propiedad topológica hereditaria, es decir, si X es separable y $V \subset X$ es un subespacio, entonces V es separable.

2.2. Espacios de Banach

Definición 2.2.1. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X. Diremos que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una *sucesión de Cauchy* si para cada $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|x_n - x_m\| \leq \epsilon, \qquad \forall\, n, m \geq N.$$

Si una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ es convergente, entonces es de Cauchy. La afirmación inversa no siempre es cierta, lo que motiva la siguiente definición.

Definición 2.2.2. Un conjunto $A \subset X$ es *completo* si toda sucesión de Cauchy en A converge en A. Un *espacio de Banach* es una espacio normado completo.

Sea X un espacio de Banach y $V \subset X$ un subespacio cerrado. Entonces V es completo, es decir, V es un espacio de Banach.

2.3. Operadores lineales acotados

Los operadores lineales entre espacios normados ocupan un lugar central en la teoría. Por definición están asociados a las estructuras algebraica y topológica, así que a través de ellos se establecen relaciones entre los espacios normados; en particular, la noción de isomorfismo. Para comenzar, tenemos un criterio para determinar la continuidad de un operador lineal en términos de la norma.

Definición 2.3.1. Sean X y Y espacios normados. Una función lineal $T : X \to Y$ es un *operador lineal acotado* si existe $C > 0$ tal que

$$\|Tx\|_Y \leq C\|x\|_X, \qquad \forall\, x \in X. \tag{2.1}$$

Equivalentemente, la restricción de T a la bola B_X es una función acotada:

$$\|Tx\|_Y \leq C, \qquad \forall\, x \in B_X.$$

Proposición 2.3.1. *Sean X y Y espacios normados y $T : X \to Y$ un operador lineal. Las siguientes propiedades son equivalentes:*

I. *T es uniformemente continuo.*

II. *T es continuo en cero.*

III. *T es un operador lineal acotado.*

En general, un operador lineal acotado $T : X \to Y$ define dos subespacios, el *núcleo*, también conocido como *kernel*:

$$N(T) := \{x \in X \mid Tx = 0\},$$

y el *rango*:

$$R(T) := \{y \in Y \mid y = Tx, \text{ para algún } x \in X\}.$$

Puesto que $N(T) = T^{-1}(0)$ y T es una función continua, su núcleo siempre es un subespacio cerrado de X; sin embargo este no es el caso del rango.

Para un operador lineal entre espacios normados, $T : X \to Y$, definimos

$$\|T\| := \sup\{\|Tx\|_Y \mid \|x\|_X \leq 1\}. \tag{2.2}$$

Notemos que $0 \leq \|T\| \leq \infty$. Además, T es un operador lineal acotado si, y sólo si, $\|T\| < \infty$.

El *espacio dual* de X es la colección de funcionales lineales acotados,

$$X^* := \{\phi : X \to \mathbb{K} \mid \|\phi\| < \infty\}.$$

La función dada por (2.2) resulta ser una norma en X^*.

Proposición 2.3.2. *El espacio dual de un espacio normado es un espacio de Banach.*

Definición 2.3.2. Sean X y Y espacios normados y $T : X \to Y$ un operador lineal acotado. El *operador transpuesto* de T se define como $T' : Y^* \to X^*$ dado por

$$T'\phi := \phi \circ T, \qquad \forall\, \phi \in Y^*.$$

Si T es un operador lineal acotado, entonces su transpuesto T' satisface ser un operador lineal acotado entre los espacios duales respectivos.

Si V es un subespacio de X, entonces la relación entre sus duales V^* y X^* es la esperada, pues un funcional continuo en V se extiende a un funcional continuo en X, como lo precisa el siguiente teorema fundamental.

Teorema 2.3.1 (de Hahn-Banach). *Sea X un espacio normado y $V \subset X$ un subespacio vectorial. Si $\phi \in V^*$, entonces existe $\Phi \in X^*$ tal que su restricción $\Phi|_V = \phi$ y $\|\Phi\| = \|\phi\|$.*

A continuación, se presentan algunas propiedades importantes que pueden tener los operadores lineales acotados.

Definición 2.3.3. Sean X y Y espacios normados. Si $L : X \to Y$ satisface que

$$\|Lx - Ly\|_Y = \|x - y\|_X, \qquad \forall\, x, y \in X, \tag{2.3}$$

entonces L es una *isometría*. Observemos que toda isometría es una función uniformemente continua e inyectiva.

Por otra parte, los espacios X y Y son *isomorfos* cuando existe un operador lineal acotado entre ellos $T : X \to Y$, que sea biyectivo y su inversa también sea continua. En este caso el operador T es llamado *isomorfismo*.

Proposición 2.3.3. *Sean X y Y espacios de Banach. Entonces un operador lineal acotado $T : X \to Y$ es un isomorfismo si, y sólo si, $T' : Y^* \to X^*$ es un isomorfismo.*

Para un operador lineal T, la igualdad

$$\|Tx\|_Y = \|x\|_X, \qquad \forall\, x \in X, \tag{2.4}$$

es equivalente a que T sea una isometría. Además, se sigue de (2.4) que T es un operador lineal acotado.

Definición 2.3.4. Un operador lineal acotado $P : X \to X$ es una *proyección* si $P^2 = P$.

El rango de una proyección es un subespacio cerrado de X. Usándolo con el núcleo obtenemos una descomposición del espacio X, en el sentido que indica la siguiente definición.

Definición 2.3.5. Sean V y W subespacios cerrados de X. Escribimos $X = V \oplus W$ cuando $X = V + W$ y $V \cap W = \{0\}$.

Proposición 2.3.4. *Sea $P : X \to X$ un operador lineal acotado. Si P es una proyección, entonces*

I. $I - P$ *también es una proyección.*

II. $R(P) = N(I - P)$ *es un subespacio vectorial cerrado.*

III. $Px = x$, $\forall\, x \in R(P)$.

IV. $X = R(P) \oplus N(P)$

Demostración. I. Claramente $I-P$ es un operador lineal acotado. Como $P^2 = P$, entonces

$$(I-P)^2 = I - 2P + P^2 = I - P.$$

II. La continuidad del operador $I-P$ implica que $N(I-P)$ es un subespacio cerrado. Veamos ahora la igualdad de los conjuntos. Sea $x \in X$. Como $P^2 = P$, se sigue que

$$(I-P)Px = Px - P^2x = 0$$

Entonces $R(P) \subset N(I-P)$. Por otra parte, para $x \in N(I-P)$ tenemos que $(I-P)x = 0$. Luego, $x = Px \in R(P)$. Obtenemos así que $N(I-P) \subset R(P)$ y concluimos lo deseado.

III. Tomemos $x \in R(P)$ y $y \in X$ tal que $Py = x$. Luego, $Px = P^2y = Py = x$.

IV. Sea $x \in X$, entonces $x = Px + (I-P)x$. Del inciso II se sigue que $(I-P)x \in N(P)$. Así que $X = R(P) + N(P)$. Además, si $x \in R(P) \cap N(P)$, el inciso III implica que $x = Px = 0$. Concluimos que $X = R(P) \oplus N(P)$. □

2.4. Funciones sesquilineales

Sean E y F espacios normados complejos.

Definición 2.4.1. Una función $S : E \times F \to \mathbb{C}$ es *sesquilineal* si, para $x, y \in E$, $w, z \in F$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, se cumple que

I. $S(x+y, w+z) = S(x,w) + S(x,z) + S(y,w) + S(y,z)$.

II. $S(\alpha x, \beta y) = \alpha\overline{\beta} S(x,y)$.

De manera análoga al caso de un operador lineal acotado, diremos que una función sesquilineal $S : E \times F \to \mathbb{C}$ es *acotada*, si existe una constante positiva C tal que

$$|S(x,z)| \leq C\|x\|_E\,\|z\|_F \qquad \forall\, x \in E,\ z \in F. \tag{2.5}$$

Si una función sesquilineal es acotada, entonces es continua en el espacio producto $E \times F$, en el sentido que especifica la siguiente proposición.

Proposición 2.4.1. *Sean $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ y $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset F$ dos sucesiones convergentes, a $x \in E$ y $z \in F$, respectivamente. Si $S : E \times F \to \mathbb{C}$ es una función sesquilineal acotada, entonces*

$$\lim_{n\to\infty} S(x_n, y_n) = S(x,y).$$

Demostración. Dado que S es acotada, entonces existe $C > 0$ que satisface (2.5). De la aditividad de S, tenemos que

$$\begin{aligned}
|S(x_n,y_n) - S(x,y)| &= |S(x_n,y_n) - S(x,y_n) + S(x,y_n) - S(x,y)| \\
&\leq |S(x_n,y_n) - S(x,y_n)| + |S(x,y_n) - S(x,y)| \\
&= |S(x_n - x, y_n)| + |S(x, y_n - y)| \\
&\leq C\|x_n - x\|_E\|y_n\|_F + C\|x\|_E\|y_n - y\|_F.
\end{aligned}$$

Observemos $x_n \to x$ y $y_n \to y$. Además, la convergencia implica que $\{y_n\}$ es una sucesión acotada. Por lo cual, tomando $n \to \infty$ en la desigualdad anterior, obtenemos que $|S(x_n, y_n) - S(x, y)| \to 0$; lo cual prueba lo deseado. □

2.5. Espacios de Hilbert

Un espacio de Hilbert es una generalización de $\mathbb{R}^N$ que conserva sus propiedades geométricas, al definir la norma mediante un producto escalar.

Definición 2.5.1. Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Un *producto interior* en E es una función $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \to \mathbb{K}$ que satisface lo siguiente, para $x, y \in E$ y $\lambda \in \mathbb{K}$,

I. $\langle x, x \rangle \geq 0$ y $\langle x, x \rangle = 0$ si, y sólo si, $x = 0$;

II. $\langle x + \lambda y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \lambda \langle x, y \rangle$; y

III. $\langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}$, donde $\overline{z}$ es el conjugado de $z \in \mathbb{K}$.

En un espacio vectorial E con producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle$, definimos la función $\|\cdot\| : E \times E \to \mathbb{R}$ por

$$\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}, \qquad \forall\, x \in E.$$

Entonces, para $x, y \in E$ se cumple la desigualdad de Cauchy-Schwarz:

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

De la desigualdad de Cauchy-Schwarz se prueba que la función $\|\cdot\|$ satisface la desigualdad del triángulo, y por tanto, $\|\cdot\|$ es una norma en E.

Observemos que en el caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, las propiedades II y III, de la definición de producto interior, equivalen a que la función $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es sesquilineal. A su vez, la desigualdad de Cauchy-Schwarz indica que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es una función sesquilineal acotada.

Definición 2.5.2. Un *espacio de Hilbert* es un espacio con producto interior, que es completo respecto a la norma inducida por su producto interior.

2.6. Ortogonalidad

El producto interior define relaciones geométricas entre vectores, fundamentalmente la ortogonalidad.

Definición 2.6.1. Sea H un espacio de Hilbert. Los vectores $x, y \in H$ son *ortogonales* si

$$\langle x, y \rangle = 0.$$

Asimismo, el *complemento ortogonal* de $A \subset H$ es

$$A^{\perp} := \{x \in H \mid \langle a, x \rangle = 0,\ \forall\, a \in A\}.$$

Proposición 2.6.1. *Sea H un espacio de Hilbert y $x \in H$. Si $K \subset H$ es no-vacío, completo y convexo, entonces existe un único $p \in K$ tal que*

$$\|x - p\| \leq \|x - y\|, \qquad \forall\, y \in K.$$

Luego, $\|x - p\| = \operatorname{dist}(x, K)$. Esto permite definir la proyección P de H sobre K, por $P(x) = p$.

Claramente, un subespacio vectorial es un conjunto convexo. En tal caso, las conclusiones de la proposición anterior se pueden ampliar.

Teorema 2.6.1. *(de descomposición ortogonal) Sea H un espacio de Hilbert y $V \subset H$ un subespacio cerrado. Entonces:*

I. La proyección P de H sobre V es ortogonal, esto es, $x - Px \in V^{\perp}$, $\forall\, x \in H$.

II. La proyección P es lineal y continua, con $\|P\| \leq 1$ y $P^2 = P$.

III. $H = V \oplus V^{\perp}$

IV. $V^{\perp\perp} = V$.

Una de las consecuencias más importantes del teorema de descomposición ortogonal es que establece una representación del espacio dual de un espacio de Hilbert.

Teorema 2.6.2 (de representación de Riesz)**.** *Sea H un espacio de Hilbert. Entonces, para cada $\phi \in H^*$ existe un único $x \in H$ tal que*

$$\phi(y) = \langle y, x \rangle, \qquad \forall\, y \in H. \tag{2.6}$$

Además, $\|\phi\|_{H^*} = \|x\|_H$.

Definición 2.6.2. Sea H un espacio de Hilbert. Un operador lineal acotado $T : H \to H$ es un *operador autoadjunto* si

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle, \qquad \forall\, x, y \in H.$$

Proposición 2.6.2. *Si $P : H \to H$ es una proyección ortogonal, P es un operador autoadjunto.*

Demostración. Sean $x, y \in H$. Por el teorema de la descomposición ortogonal, tenemos que $\langle (I - P)x, Py \rangle = \langle Px, (I - P)y \rangle = 0$. Entonces,

$$\begin{aligned} \langle Px, y \rangle &= \langle Px, Py + (I - P)y \rangle \\ &= \langle Px, Py \rangle \\ &= \langle Px, Py \rangle + \langle (I - P)x, Py \rangle \\ &= \langle x, Py \rangle. \end{aligned}$$

□

2.7. Bases ortonormales

En el espacio euclidiano $\mathbb{R}^N$, los vectores se pueden representar como combinación lineal de los elementos de una base, por ejemplo la canónica. En un espacio de Hilbert también existen conjuntos linealmente independientes que generan al espacio vectorial, que llamamos bases de Hamel. Sin embargo, una base de Hamel no preserva la estructura dada por el producto interior. Resultara más útil la representación de un vector que se presenta a continuación.

Definición 2.7.1. Sea H un espacio de Hilbert. Un *sistema ortogonal* es una familia no-vacía $S \subset H$ tal que $x \neq 0$, $\forall\, x \in S$ y

$$\langle x, y\rangle = 0, \qquad \forall\, x, y \in S,\ x \neq y.$$

Si además $\langle x, x\rangle = 1$, $\forall\, x \in S$, entonces S es un *sistema ortonormal.*

En lo sucesivo, los sistemas ortonormales que utilizaremos serán numerables, es decir, de la forma $\{e_n\}_{n\in N}$ con $N = \mathbb{N}$, o bien, $N = \{1, \ldots, j\}$ con $j \in \mathbb{N}$. Sin embargo, para simplificar la notación, enunciaremos los resultados para el caso $N = \mathbb{N}$.

Definición 2.7.2. Sea H un espacio de Hilbert y $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ un sistema ortonormal en H. Llamamos *n-ésimo coeficiente de Fourier* de $x \in H$, respecto al sistema $\{e_n\}$, al escalar

$$\langle x, e_n\rangle,$$

y *serie de Fourier* de x a la expresión

$$\sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n\rangle e_n.$$

Teorema 2.7.1 (Desigualdad de Bessel)**.** *Sea H un espacio de Hilbert. Si $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un sistema ortonormal en H, entonces*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2 \leq \|x\|^2, \qquad \forall\, x \in H.$$

Corolario 2.7.1. *Sea H un espacio de Hilbert y $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un sistema ortonormal en H. Para cada $x \in H$, la serie de Fourier de x converge en H y, tomando $x_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n\rangle e_n$, resulta que $\langle x, e_n\rangle = \langle x_0, e_n\rangle$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.*

Ejemplo 2.7.1. Un sistema ortonormal en $\mathbb{R}^2$ es $S = \{(1, 0)\}$. Respecto a S, la serie de Fourier de $(0, 1)$ es 0, pues

$$\langle (0, 1), (1, 0)\rangle (1, 0) = 0.$$

En este caso, S no consigue representar al espacio $\mathbb{R}^2$.

A continuación enunciamos condiciones, tanto sobre el sistema ortonormal como sobre el espacio de Hilbert, para obtener una representación con un sistema ortonormal numerable.

Definición 2.7.3. Sea H un espacio de Hilbert. Un sistema ortonormal $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es *base ortonormal numerable* de H, si cada $x \in H$ se puede representar por su serie de Fourier:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n.$$

Proposición 2.7.1. *Sea H un espacio de Hilbert y $S = \{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un sistema ortonormal en H. Entonces, las siguientes propiedades son equivalentes:*

I. El conjunto S es una base ortonormal numerable.

II. Se satisface la igualdad de Parseval, esto es, para cada $x \in H$

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 .$$

III. $S^{\perp} = \{0\}$.

Proposición 2.7.2. *Sea H un espacio de Hilbert. Entonces, H es separable si, y sólo si, H posee una base ortonormal numerable.*

2.8. Operadores unitarios

Sean H y K espacios de Hilbert.

Definición 2.8.1. Una transformación lineal $U : H \to K$ es un *operador unitario* si es suprayectivo y preserva el producto interior, esto es,

$$\langle Ux, Uy \rangle_K = \langle x, y \rangle_H, \qquad \forall\, x, y \in H. \tag{2.7}$$

Lema 2.8.1. *Sea $U : H \to K$ una transformación lineal suprayectiva. Entonces U es un operador unitario si, y sólo si, es una isometría.*

Demostración. Supongamos que U es un operador unitario. Dado que la norma está inducida por el producto interior, para todo $x \in H$ se cumple que

$$\|Ux\|_K^2 = \langle Ux, Ux \rangle = \langle x, x \rangle = \|x\|^2.$$

Como U es una transformación lineal, la igualdad anterior implica que U es una isometría.

Ahora bien, la fórmula de polarización afirma que para un espacio vectorial real

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right), \qquad \forall\, x, y \in H, \tag{2.8}$$

mientras que para un espacio vectorial complejo

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2\right), \qquad \forall\, x, y \in H. \tag{2.9}$$

Cuando U es una isometría, (2.8), o bien, (2.9) implica que $\langle Ux, Uy \rangle = \langle x, y \rangle$, $\forall\, x, y \in H$. Por lo tanto U es un operador unitario. □

Como consecuencia del lema 2.8.1, un operador unitario es un operador acotado y biyectivo. Entonces existe su inversa, y de (2.7) es claro que $U^{-1} : K \to H$ también es un operador unitario.

Proposición 2.8.1. *Sea $U : H \to K$ un operador unitario. Si $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base ortonormal numerable, entonces $\{Ue_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base ortonormal numerable de K.*

Demostración. De la condición (2.7) es claro que $\{Ue_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un sistema ortonormal. Tomemos $x \in H$, entonces

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n\rangle e_n.$$

Usando nuevamente (2.7) y la continuidad del operador U, obtenemos que

$$Ux = \sum_{n=1}^{\infty} \langle Ux, Ue_n\rangle Ue_n,$$

que establece lo afirmado. $\square$

Hemos establecido que los operadores unitarios preservan la estructura de los espacios de Hilbert. En base a esto, diremos que H y K son *isomorfos como espacios de Hilbert* si existe un operador unitario de H en K.

Capítulo 3

Espacios L^p

3.1. Medidas abstractas

La teoría de integración se desarrolla, de forma general, en el contexto de un espacio de medida. Sea Ω un conjunto arbitrario. Una colección Σ de subconjuntos de Ω es una *σ-álgebra* en Ω si

I. $\Omega \in \Sigma$.

II. Si $E \in \Sigma$, entonces $E^c \in \Sigma$; donde E^c denota el complemento de E respecto a Ω.

III. Si $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \Sigma$ y $E = \cup_{n \in \mathbb{N}} E_n$, entonces $E \in \Sigma$.

El conjunto Ω con una σ-álgebra Σ constituye un *espacio medible*.

Una *medida positiva*, o simplemente *medida*, es una función $\mu : \Sigma \to [0, \infty]$ que es *σ-aditiva*. Es decir, si $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \Sigma$ es una colección de conjuntos disjuntos entre sí y $E = \cup_{n \in \mathbb{N}} E_n$, entonces

$$\mu(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n). \tag{3.1}$$

A la terna (Ω, Σ, μ) le llamamos *espacio de medida*. Si $\mu(\Omega) < \infty$, decimos entonces que μ es una *medida finita*. Siempre trabajaremos con medidas para las cuales $\mu(\Omega) > 0$.

3.2. La medida de Lebesgue

La medida más importante en nuestro desarrollo es la medida de Lebesgue definida en la σ-álgebra formada por los conjuntos Lebesgue medibles de $\mathbb{C}$. Como bosquejaremos en seguida, la construcción de la medida de Lebesgue en $\mathbb{C}$ es análoga a la realizada en $\mathbb{R}$. El primer paso es considerar el área de un rectángulo.

Un *rectángulo* es un conjunto de la forma

$$I_1 \times I_2 = \{x + iy \in \mathbb{C} \,|\, x \in I_1, y \in I_2\},$$

donde $I_1, I_2 \subset \mathbb{R}$ son intervalos. Denotaremos por $\mathcal{R}$ a la colección de todos los rectángulos acotados en $\mathbb{C}$. El área de un rectángulo acotado $R = I_1 \times I_2 = (a, b) \times (c, d)$, con $a \leq b$ y $c \leq d$, es

$$a(R) = (b - a) \cdot (d - c).$$

Definición 3.2.1. Definimos la *medida exterior* de $A \subset \mathbb{C}$ por

$$m^*(A) := \text{ínf}\Big\{ \sum_{k=1}^{\infty} a(R_k) \,|\, A \subset \cup_{k \in \mathbb{N}} R_k,\ R_k \in \mathcal{R} \Big\}.$$

Sin embargo, m^* no es una función σ-aditiva. Para obtener una medida es necesario imponer una restricción sobre su dominio.

Definición 3.2.2. Un conjunto $E \subset \mathbb{C}$ es *Lebesgue medible* si para cualquier $A \subset \mathbb{C}$,

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \setminus E).$$

La colección de conjuntos Lebesgue medibles es suficientemente amplia, pues si $V \subset \mathbb{C}$ es abierto, entonces V es Lebesgue medible. Además, $m * (R) = a(R)$, $\forall\, R \in \mathcal{R}$. Esto muestra que m^* extiende la función área.

Sea $\mathcal{M}$ la colección de conjuntos Lebesgue medibles en $\mathbb{C}$. Resulta que $\mathcal{M}$ es una σ-álgebra y la restricción de m^* a $\mathcal{M}$ es una medida, la *medida de Lebesgue*, que en adelante denotaremos por m. Asimismo, si $\Omega \in \mathcal{M}$ entonces $\mathcal{M}_\Omega := \{E \cap \Omega \,|\, E \in \mathcal{M}\}$ también es una σ-álgebra en Ω. El espacio de medida en el que se centra nuestro interés es $(\Omega, \mathcal{M}_\Omega, m)$.

3.3. Integración

En lo que sigue, sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida fijo. En esta sección repasaremos la construcción de la integral (abstracta) de Lebesgue en (Ω, Σ, μ), tanto para funciones reales como para funciones complejas. Comenzamos con las funciones que toman valores en $\mathbb{R}^*$, los *reales extendidos*. Recordemos que $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ y se define $\infty \cdot 0 = -\infty \cdot 0 = 0$.

Para trabajar en este contexto con una función positiva, teniendo presente que la medida está restringida a los conjuntos medibles, es necesario imponer condiciones de medibilidad sobre su preimagen en Ω. Las funciones integrables resultarán ser una subclase de las funciones medibles.

Definición 3.3.1. Una función $f : \Omega \to \mathbb{R}^*$ es *medible* si, para cada $t \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(t, \infty] = \{x \in \Omega \,|\, t < f(x)\} \in \Sigma$.

Resulta que si $f, g : \Omega \to \mathbb{R}^*$ son funciones medibles y $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces $f + g$, λf, $f \cdot g$ y $1/f$, definidas en sus dominios correspondientes, también son funciones medibles. Asimismo, el límite puntual de una sucesión de funciones medibles es medible.

Ejemplo 3.3.1. Dado un conjunto $A \subset \Omega$, definimos su función indicadora por

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

De la definición de función medible se sigue que χ_A es medible si, y sólo si, $A \in \Sigma$.

Ejemplo 3.3.2. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un conjunto Lebesgue medible, y consideremos una función continua $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Para cada $t \in \mathbb{R}$, el conjunto $(t, \infty) \subset \mathbb{R}$ es un abierto. Luego, la continuidad de f implica que $f^{-1}(t, \infty)$ también es un abierto, y por lo tanto, medible. Se sigue que f es una función medible respecto a $\mathcal{M}_\Omega$.

Volvamos a la situación abstracta en (Ω, Σ, μ). Para definir la integral, comenzamos con funciones sencillas hasta llegar al caso general.

Una función $s : \Omega \to \mathbb{R}$ es *simple* si es medible y únicamente toma un número finito de valores, denotémoslos por $c_1, \ldots, c_n$. Denotemos $E_k := s^{-1}(c_k)$. Como s es una función medible, se cumple que $E_k \in \Sigma$.

Teorema 3.3.1. *Sea $f : \Omega \to [0, \infty]$ una función medible. Entonces existe una sucesión de funciones simples en Ω, $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, tal que*

I. $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \ldots \leq f$.

II. $s_n(x) \to f(x)$, $\forall\, x \in \Omega$.

III. Si f es acotada, entonces la convergencia de $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es uniforme.

Este resultado sugiere la conveniencia de definir primero la integral para funciones simples, y de ahí se seguirá la definición para funciones medibles y no-negativas.

La *integral de una función simple no-negativa s, respecto a la medida μ,* es

$$\int_\Omega s\, d\mu := \sum_{k=1}^{n} c_k \mu(E_k). \tag{3.2}$$

Ahora, sea $f : \Omega \to [0, \infty]$ una función medible. En este caso, definimos

$$\int_\Omega f\, d\mu := \sup \Big\{ \int_\Omega s\, d\mu \mid s \text{ es simple, } 0 \leq s \leq f \Big\}. \tag{3.3}$$

Observemos que para una función medible simple, (3.2) coincide con (3.3). Además, $0 \leq \int_\Omega f\, d\mu \leq \infty$

Finalmente, consideremos una función $f : \Omega \to \mathbb{R}^*$ medible. A la función

$$f_+(x) := \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \geq 0, \\ 0 & \text{si } f(x) < 0, \end{cases}$$

le llamamos *parte positiva* de f, y la función

$$f_-(x) := \begin{cases} 0 & \text{si } f(x) \geq 0, \\ -f(x) & \text{si } f(x) < 0, \end{cases}$$

es su *parte negativa*. Que f sea una función medible equivale a que f_+ y f_- también lo son. Esto nos permite definir la integral de f en términos de f_+ y f_-.

Definición 3.3.2. Sea $f : \Omega \to \mathbb{R}^*$ una función medible. Si $\int_\Omega f_+ \, d\mu < \infty$ o $\int_\Omega f_- \, d\mu < \infty$, entonces

$$\int_\Omega f \, d\mu := \int_\Omega f_+ \, d\mu - \int_\Omega f_- \, d\mu. \tag{3.4}$$

En tal caso, diremos que la integral de f existe. Si la integral de f existe y (3.4) toma un valor finito, entonces f es *integrable*.

Solo queda definir la integral para una función compleja. Nos basamos en el caso real, pues una función compleja tiene una descomposición sencilla en funciones reales. Para un función $f : \Omega \to \mathbb{C}$ escribimos $u = \operatorname{Re} f$, la *parte real de la función* f y $v = \operatorname{Im} f$, la *parte imaginaria*; entonces

$$f = u + iv.$$

En términos de las partes real e imaginaria, definimos a continuación las propiedades de una función compleja relacionadas con la medida.

Definición 3.3.3. Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida.

I. Una función $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es una *función medible* si $\operatorname{Re} f$ y $\operatorname{Im} f$ son medibles.

II. Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función medible. Decimos que f es *integrable* si sus partes real e imaginaria son integrables. En ese caso,

$$\int_\Omega f \, d\mu := \int_\Omega \operatorname{Re} f \, d\mu + i \int_\Omega \operatorname{Im} f \, d\mu.$$

Denotaremos el conjunto de funciones complejas que son integrables en Ω por $\mathcal{L}^1(\mu)$.

A partir de la definición y de las propiedades correspondientes en las funciones reales que son integrables, resulta que f es integrable si, y sólo si, $|f|$ es integrable. Asimismo, f es integrable si, y sólo si, su función conjugada $\overline{f}$ lo es.

En ocasiones nos interesa la integración en un subconjunto medible de Ω. Si $E \in \Sigma$ y $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$, definimos

$$\int_E f \, d\mu := \int_\Omega \chi_E f \, d\mu.$$

Los siguientes resultados son todos relativos a un espacio de medida (Ω, Σ, μ).

Proposición 3.3.1. *Sean $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ funciones integrables.*

I. La integral es lineal. Esto es,

$$\int_\Omega (f+g)\, d\mu = \int_\Omega f\, d\mu + \int_\Omega g\, d\mu.$$

$$\int_\Omega (\lambda f)\, d\mu = \lambda \int_\Omega f\, d\mu, \qquad \forall\, \lambda \in \mathbb{C}.$$

II. Respecto a la conjugación,

$$\int_\Omega \overline{f}\, d\mu = \overline{\int_\Omega f\, d\mu}.$$

III. Desigualdad del triángulo,

$$\left|\int_\Omega f\, d\mu\right| \leq \int_\Omega |f|\, d\mu.$$

IV. Si $0 \leq f \leq g$, entonces

$$\int_\Omega f\, d\mu \leq \int_\Omega g\, d\mu.$$

V. Sean $A, B \in \Sigma$ tales que $A \subset B$. Si $f \geq 0$, entonces

$$\int_A f\, d\mu \leq \int_B f\, d\mu.$$

VI. Si $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \Sigma$ es una colección de subconjuntos disjuntos a pares y $E = \cup_{n \in \mathbb{N}} E_n$, entonces

$$\int_E f\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f\, d\mu.$$

VII. Sea $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \Sigma$ una colección de conjuntos anidados, es decir, $E_n \subset E_{n+1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Si $E = \cup_{n \in \mathbb{N}} E_n$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f\, d\mu = \int_E f\, d\mu.$$

Un conjunto $E \subset \Omega$ tiene *medida cero* si es medible y $\mu(E) = 0$. Los conjuntos de medida cero son importantes en la teoría de integración pues, como veremos a continuación, la integral los “ignora”.

Sea P una propiedad que puede tener un punto de Ω. Decimos que la propiedad P se cumple *μ-casi en todas partes*, y escribimos P μ-c.t.p. si existe N de medida cero, tal que x tiene la propiedad P, $\forall\, x \in \Omega \setminus N$.

Ejemplo 3.3.3. Sean h y g funciones integrables en Ω. Si $h = g$ c.t.p., entonces existe un conjunto $N \in \Sigma$ de medida cero tal que $h(x) = g(x)$, $\forall\, x \in \Omega \setminus N$. Se sigue que,

$$\int_N h\, d\mu = \int_N g\, d\mu = 0.$$

Luego,

$$\int_\Omega h\, d\mu = \int_{\Omega\setminus E} h\, d\mu = \int_\Omega g\, d\mu.$$

Así como sucede en el ejemplo anterior, en general, es suficiente tener una propiedad casi en todas partes para obtener el resultado correspondiente con la integral. Por otra parte, a partir de las propiedades de la integral se pueden deducir propiedades de la función salvo conjuntos de medida cero.

Proposición 3.3.2. *Si $f : \Omega \to \mathbb{R}^*$ es una función integrable, entonces f toma valores reales casi en todas partes.*

Demostración. Es suficiente probar que $|f|$ es una función real casi en todas partes.

Sea $E = \{x \in \Omega \,|\, |f(x)| = \infty\}$. Dado que $|f|$ es una función no-negativa,

$$\mu(E) \cdot \infty = \int_E |f|\, d\mu \leq \int_\Omega |f|\, d\mu < \infty$$

Por lo tanto, $\mu(E) = 0$. $\square$

Proposición 3.3.3. *Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función medible.*

I. Si $E \in \Sigma$ es tal que $f(x) \geq 0$, $\forall\, x \in E$ y

$$\int_E f\, d\mu = 0, \tag{3.5}$$

entonces $f = 0$ c.t.p. en E.

II. Supongamos que $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Si

$$\int_E f\, d\mu = 0, \qquad \forall\, E \in \Sigma, \tag{3.6}$$

entonces $f = 0$ c.t.p. en Ω.

Demostración. I. Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos el conjunto medible

$$A_n = \{x \in E \,|\, f(x) > 1/n\}.$$

Como f es una función no-negativa, de la proposición 3.3.1 y (3.5) tenemos que

$$\frac{1}{n}\mu(A_n) \leq \int_{A_n} f\, d\mu \leq \int_E f d\mu = 0.$$

Entonces $\mu(A_n) = 0$. Dado que

$$\{x \in E \,|\, f(x) > 0\} = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n,$$

una unión numerable de conjuntos de medida cero, se sigue que $f = 0$ c.t.p. en E.

II. Escribamos $u = \operatorname{Re} f$ y $v = \operatorname{Im} f$, entonces $f = u + iv$. Sea

$$E = \{x \in \Omega \,|\, f(x) \geq 0\}.$$

Para este conjunto medible, notemos que

$$\operatorname{Re} \int_E f \, d\mu = \int_E u_+ \, d\mu.$$

Por lo cual, de (3.6) se sigue que

$$\int_E u_+ \, d\mu = 0.$$

Luego, el inciso I implica que $u_+ = 0$ c.t.p. en E. Teniendo presente la definición de la parte positiva de una función, obtenemos que $u_+ = 0$ c.t.p. en Ω. Similarmente, concluimos que $u_- = v_+ = v_- = 0$ c.t.p. en Ω.

□

Proposición 3.3.4. *Supongamos que μ es una medida finita, y sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función integrable. Si para $a < b$ se tiene que*

$$a \leq \frac{1}{\mu(E)} \int_E f \, d\mu \leq b, \qquad \forall\, E \in \Sigma,\ \mu(E) > 0,$$

entonces $a \leq f \leq b$ c.t.p. en Ω.

Demostración. Sea $S = [a, b]$. Recordemos que el conjunto $S^c \subset \mathbb{C}$ es igual a la unión numerable de discos abiertos. Tomemos uno de ellos, $D_r(p) \subset S^c$. Sea $E = f^{-1}(D_r(p))$. Para probar que $\mu(E) = 0$, procedamos por contradicción y supongamos que $\mu(E) > 0$. Como $|f(x) - p| < r$, $\forall\, x \in E$, tenemos que

$$\begin{aligned} \left| \int_E f \, d\mu - p \right| &= \frac{1}{\mu(E)} \left| \int_E f - p \, d\mu \right| \\ &\leq \frac{1}{\mu(E)} \int_E |f - p| \; d\mu \\ &\leq r. \end{aligned}$$

La desigualdad anterior implica que $\int_E f \, d\mu \in S^c$, lo que contradice la hipótesis. Por lo tanto, $\mu(E) = 0$. Dado que el conjunto $S^c \subset \mathbb{C}$ es igual a la unión numerable de discos abiertos, se sigue que $\mu(f^{-1}(S^c)) = 0$. Por lo tanto, $f(x) \in S$ c.t.p. □

Teorema 3.3.2 (de convergencia monótona)**.** *Sea* $\{f_n\}$ *una sucesión de funciones no-negativas y medibles. Si* $0 \leq f_n \leq f_{n+1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, *entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \, d\mu = \int_\Omega \lim_{n\to\infty} f_n \, d\mu.$$

Teorema 3.3.3 (de convergencia dominada)**.** *Sea* $\{f_n\}$ *una sucesión de funciones complejas y medibles en* Σ *y* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *medible tal que* $f_n \to f$ *casi en todas partes. Si existe una función* $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ *tal que* $|f_n| \leq g$ *c.t.p.* $\forall\, n \in \mathbb{N}$, *entonces* $f, f_n \in \mathcal{L}^1(\mu)$ *y*

$$\int_\Omega \lim_{n\to\infty} f_n \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \, d\mu.$$

Limitándonos a la medida de Lebesgue en $\mathbb{C}$, los siguientes teoremas son fundamentales al tratar la integración.

Teorema 3.3.4 (de Tonelli)**.** *Si* $f : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \to [0, \infty]$ *es una función medible, entonces*

I. *Para casi toda* $z \in \mathbb{D}$, *la función dada por* $f_z(w) := f(z, w)$ *es medible en* $\mathbb{D}$.

II. *La función (definida c.t.p.) dada por*

$$z \mapsto \int_{\mathbb{D}} f(z, w) \, dm(w),$$

es medible en $\mathbb{D}$, *donde* $dm(w)$ *indica la medida de Lebesgue en el plano complejo respecto a la función* $w \mapsto f_z(w)$.

III.
$$\int_{\mathbb{D}\times\mathbb{D}} f(z, w) \, dm = \int_{\mathbb{D}} \left(\int_{\mathbb{D}} f(z, w) \, dm(w) \right) \, dm(z)$$

Naturalmente, al intercambiar z *con* w *se cumplen las afirmaciones correspondientes.*

Teorema 3.3.5 (de cambio de variable)**.** *Sea* $U \subset \mathbb{R}^2$ *un conjunto abierto y* $\varphi : U \to \mathbb{R}^2$ *una función de clase* C^1 *e inyectiva. Entonces, para toda función integrable* $f : \varphi(U) \to \mathbb{C}$,

$$\int_{\varphi(U)} f \, dm = \int_U (f \circ \varphi) \, |\det J_\varphi| \, dm,$$

donde J_φ *es la matriz jacobiana de* φ.

Ejemplo 3.3.4. Sean Ω_1 y Ω_2 dominios en el plano complejo, y $\varphi : \Omega_1 \to \Omega_2$ una biyección analítica.. Entonces $\varphi = u + iv$ satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Se sigue que su matriz jacobiana es:

$$J_\varphi = \begin{pmatrix} \partial u/\partial x & -\partial v/\partial x \\ \partial v/\partial x & \partial u/\partial x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} \varphi' & -\operatorname{Im} \varphi' \\ \operatorname{Im} \varphi' & \operatorname{Re} \varphi' \end{pmatrix},$$

y $\det J_\varphi = (\operatorname{Re}\varphi')^2 + (\operatorname{Im}\varphi')^2$. En este caso, el teorema de cambio de variable asegura que

$$\int_{\Omega_2} f\, dm = \int_{\Omega_1} (f \circ \varphi)\, |\varphi'|^2\, dm.$$

3.4. Espacios L^p

Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida. Previamente habíamos introducido el conjunto de funciones integrables en Ω, $\mathcal{L}^1(\mu)$. Dado que una función es integrable si, y sólo si, su módulo también lo es, entonces $\mathcal{L}^1(\mu)$ consiste de las funciones $f : \Omega \to \mathbb{C}$ tales que

$$\int_\Omega |f|\, d\mu < \infty.$$

Generalizando lo anterior para $1 \leq p < \infty$, $\mathcal{L}^p(\mu)$ es el espacio de funciones complejas que son *p-integrables* sobre Ω, esto es, tales que

$$\int_\Omega |f|^p\, d\mu < \infty. \tag{3.7}$$

Para $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$, definimos

$$\|f\|_p := \left(\int_\Omega |f|^p\, d\mu \right)^{1/p}. \tag{3.8}$$

Introduciremos ahora el espacio $\mathcal{L}^\infty(\Omega)$. En esta situación, el lugar que ocupa la integral en el caso $1 \leq p < \infty$ lo toma ahora un análogo del supremo de una función, de tal forma que ignore a los conjuntos de medida cero. Este es el supremo esencial, que definimos a continuación.

Definición 3.4.1. El supremo de una función medible $f : \Omega \to \mathbb{C}$ respecto a un conjunto $A \subset \Omega$ es

$$\|f\|_{\infty,A} := \sup\{|f(x)| \mid x \in A\}.$$

Definimos el *supremo esencial* como

$$\|f\|_{ess} := \inf\{\|f\|_{\infty,\Omega\setminus A} \mid A \in \Sigma, \mu(A) = 0\}. \tag{3.9}$$

Diremos que f está *esencialmente acotada* si $\|f\|_{ess} < \infty$.

La colección de funciones $f : E \to \mathbb{C}$ que son esencialmente acotadas se denotará por $\mathcal{L}^\infty(\mu)$.

Para $p \in (1, \infty)$, definimos su *exponente conjugado* como el (único) número en el intervalo $(1, \infty)$ tal que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Asimismo, consideramos a 1 e ∞ como exponentes conjugados.

Proposición 3.4.1 (Desigualdad de Hölder)**.** *Sean p y q exponentes conjugados, con $1 < p < \infty$. Si $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ son medibles, entonces*

$$\int_\Omega |fg| \, d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Proposición 3.4.2 (Desigualdad de Minkowski)**.** *Sea $p \in [1, \infty)$. Si $f, g \in \mathcal{L}^p(\mu)$, entonces*

$$\left(\int_\Omega |f+g|^p \, d\mu \right)^{1/p} \leq \left(\int_\Omega |f|^p \, d\mu \right)^{1/p} + \left(\int_\Omega |g|^p \, d\mu \right)^{1/p}.$$

Corolario 3.4.1. *Para $1 \leq p \leq \infty$, $\mathcal{L}^p(\mu)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$, y la función $\|\cdot\|_p$ es una seminorma en este.*

Demostración. Sea $F(\Omega, \mathbb{C})$ el espacio vectorial de funciones de Ω en $\mathbb{C}$. Veamos que $\mathcal{L}^p(\mu)$ es un subespacio de $F(\Omega, \mathbb{C})$. Asimismo, para $\|\cdot\|_p$ basta verificar la definición de seminorma.

Primero consideremos $1 \leq p < \infty$. Claramente la función 0 es p-integrable. Además, para todo $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$,

$$\|f\|_p^p = \int_\Omega |f|^p \, d\mu \geq 0.$$

De la linealidad de la integral, para $\lambda \in \mathbb{C}$ tenemos que

$$\int_\Omega |\lambda f|^p = \int_\Omega |\lambda|^p \, |f|^p \, d\mu = |\lambda|^p \int_\Omega |f|^p \, d\mu.$$

Se sigue que $\|\lambda f\|_p = |\lambda| \, \|f\|_p$ y si $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$, entonces $\lambda f \in \mathcal{L}^p(\mu)$.

Por último, la desigualdad de Minkowski implica que $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$ y si $f, g \in \mathcal{L}^p(\mu)$, entonces $f + g \in \mathcal{L}^p(\mu)$.

Para $p = \infty$ la situación es más sencilla. Claramente $0 \in \mathcal{L}^\infty(\mu)$ y $\|f\|_{ess} \geq 0$. Si $f, g \in L^\infty(\mu)$ y $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces $|f + \lambda g| \leq |f| + |\lambda| \, |g|$. Se sigue que,

$$\|f + \lambda g\|_{ess} \leq \|f\|_{ess} + |\lambda| \, \|g\|_{ess}.$$

Además, esto implica que $f + \lambda g \in L^\infty(\mu)$. □

Considerando $N := \{f \in \mathcal{L}^p(\mu) \mid \|f\|_p = 0\}$, obtenemos el espacio inducido por la seminorma de $\mathcal{L}^p(\mu)$:

$$L^p(\mu) := \mathcal{L}^p(\mu)/N. \tag{3.10}$$

Notemos que $\|f\|_p = 0$ si, y sólo si, $f = 0$ c.t.p. Así que $L^p(\mu)$ está inducido por la relación de equivalencia

$$f \sim g \text{ si, y sólo si } f = g \text{ c.t.p. en } \Omega. \tag{3.11}$$

Esto es, $f = g$ en $L^p(\mu)$ si, y sólo si, $f = g$ c.t.p. en Ω.

Como se ha mencionado, la medida de Lebesgue en el plano complejo es el ejemplo que más nos interesa. Con esto en mente, si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es un conjunto medible, entonces escribiremos $L^p(\Omega) := L^p(m)$.

3.5. Estructura

Hemos establecido que $L^p(\mu)$ es un espacio normado, para $p \in [1, \infty)$. Como se demostrará a continuación, $L^p(\mu)$ es un espacio de Banach; convenientemente, podremos utilizar técnicas del análisis funcional para estudiarlos.

Teorema 3.5.1. *Para todo $p \in [1, \infty)$, $L^p(\mu)$ es un espacio de Banach.*

Demostración. Sea $\{f_n\} \subset L^p(\mu)$ una sucesión de Cauchy. Tengamos presente que para concluir que es convergente, basta encontrar una subsucesión convergente. Sea $j \in \mathbb{N}$. Puesto que $\{f_n\}$ es de Cauchy, existe $n(j) \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|f_m - f_n\|_p \leq 2^{-j}, \qquad \forall\, m, n \geq n(j). \tag{3.12}$$

Adicionalmente, podemos tomar los índices $n(j)$ tales que $n(j) < n(j+1)$. De esta forma, obtenemos una subsucesión $\{f_{n(j)}\}$ que satisface

$$\|f_{n(j+1)} - f_{n(j)}\|_p \leq 2^{-j}, \qquad \forall\, j \in \mathbb{N}. \tag{3.13}$$

Por el criterio de comparación,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|f_{n(j)} - f_{n(j+1)}\|_p \leq \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} < \infty. \tag{3.14}$$

Tomemos $f_{n(0)} \equiv 0$. Para cada $k \in \mathbb{N}$ consideremos

$$g_k = \sum_{j=0}^{k} \left| f_{n(j+1)} - f_{n(j)} \right|, \qquad g = \sum_{j=0}^{\infty} \left| f_{n(j+1)} - f_{n(j)} \right|. \tag{3.15}$$

Observemos que cada g_k es una función medible y $g_{k+1} \geq g_k \geq 0$. Por el teorema de convergencia monótona,

$$\int_E g^p d\mu = \lim_{k\to\infty} \|g_k\|_p^p = \lim_{k\to\infty} \left\| \sum_{j=0}^{k} \left| f_{n(j+1)} - f_{n(j)} \right| \right\|_p^p. \tag{3.16}$$

Utilizando la desigualdad el triángulo en la igualdad anterior y (3.14), se sigue que

$$\begin{aligned} \int_E g^p d\mu &\leq \lim_{k\to\infty} \left(\sum_{j=0}^{k} \|f_{n(j+1)} - f_{n(j)}\|_p \right)^p \\ &= \left(\sum_{j=0}^{\infty} \|f_{n(j+1)} - f_{n(j)}\|_p \right)^p \\ &< \infty. \end{aligned}$$

Entonces $g \in L^p(\Omega, \mu)$. Al ser integrable, g es finita c.t.p. Por tanto, la serie $\sum_{j=0}^{\infty}(f_{n(j+1)} - f_{n(j)})$ converge c.t.p. y obtenemos un candidato para ser el límite de $\{f_{n(k)}\}$. Definamos,

$$f(x) = \begin{cases} \sum_{j=0}^{\infty} \left(f_{n(j+1)}(x) - f_{n(j)}(x)\right) & \text{si la serie converge en } x, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Tenemos que f es medible, pues es el límite de funciones medibles c.t.p. Además, de (3.14) y la desigualdad del triángulo resulta que $|f| \leq g$, entonces $\int_E |f|^p \, d\mu \leq \int_E g^p d\mu < \infty$. Por lo tanto, $f \in L^p(\Omega, \mu)$.

Resta probar que $f_{n_k} \to f$ en $L^p(\Omega, \mu)$. De la construcción de f,

$$f = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=0}^{k-1} (f_{n(j+1)} - f_{n(j)}) = \lim_{k\to\infty} f_{n(k)}, \qquad \text{c.t.p.}$$

Se sigue que,

$$\left|f - f_{n(j)}\right|^p \to 0 \qquad \text{c.t.p.} \tag{3.17}$$

Notemos que

$$\left|f - f_{n(k)}\right| \leq |f| + \left|f_{n(k)}\right| \leq 2g, \qquad \text{c.t.p.}$$

Entonces $\left|f - f_{n(k)}\right|^p \leq 2^p g^p$ c.t.p. Así que podemos utilizar el teorema de convergencia dominada, y por (3.17) obtenemos que

$$\lim_{k\to\infty} \|f - f_{n(k)}\|_p = \lim_{k\to\infty} \int_E \left|f - f_{n(k)}\right|^p d\mu = 0,$$

que prueba lo deseado. □

En la demostración anterior se probó que si $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p(\mu)$ es una sucesión de Cauchy, entonces existe una subsucesión $\{f_n(k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ y una función $h \in L^p(\mu)$ tal que $f_{n(k)} \to h$ c.t.p., y en la norma de $L^p(\mu)$. De aquí se obtiene el siguiente corolario.

Corolario 3.5.1. *Sea $1 \leq p < \infty$, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p(\mu)$ y $f \in L^p(\mu)$. Si $f_n \to f$ en $L^p(E)$, entonces existe una subsucesión $\{f_{n(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $f_{n(k)} \to f$ casi en todas partes.*

La norma en $L^2(\mu)$ proviene de un producto interior. En efecto, para $f, g \in L^2(\mu)$ definamos

$$\langle f, g\rangle = \int_\Omega f\,\overline{g}\, d\mu. \tag{3.18}$$

La desigualdad $|f\,\overline{g}| \leq \max\{|f|^2, |g|^2\}$, implica que la integral en (3.18) existe. Además,

$$\|f\|_2^2 = \langle f, f\rangle, \qquad \forall\, f \in L^2(\mu).$$

Como consecuencia del teorema anterior, $L^2(\mu)$ es un espacio de Hilbert.

Proposición 3.5.1. *Sea $1 \leq p \leq r \leq \infty$. Si μ es una medida finita, entonces $L^r(\mu) \subset L^p(\mu)$ y la inclusión es continua. Esto es, existe una constante (que depende de p y r) $C > 0$ tal que*

$$\|f\|_p \leq C\|f\|_r. \tag{3.19}$$

Demostración. Supongamos primero que $r < \infty$ y tomemos $a = q/p$. De esta forma $a \geq 1$ y $p \cdot a = r$.

Si $f \in L^r(\mu)$, entonces la desigualdad de Hölder implica que

$$\begin{aligned}\int_\Omega |f|^p \, d\mu &\leq \left(\int_\Omega 1 \, d\mu\right)^{1-1/s} \left(\int_\Omega |f|^{ps}\right)^{1/s} \\ &= \mu(\Omega)^{1-p/r} \left(\int_\Omega |f|^r\right)^{p/r}.\end{aligned}$$

Luego,

$$\|f\|_p \leq \mu(\Omega)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}} \|f\|_r < \infty.$$

Tomamos entonces $C = \mu(\Omega)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}}$.

Por otra parte, si $r = \infty$, escribamos $M = \|f\|_{ess}$. Tenemos que

$$\int_\Omega |f|^p \, d\mu \leq \int_\Omega M^p \, d\mu = \mu(\Omega)\, M^p < \infty.$$

Se sigue que,

$$\|f\|_p \leq \mu(\Omega)^{1/p} \|f\|_{ess}.$$

Así que $C = \mu(\Omega)^{1/p}$.

En ambos casos concluimos que $f \in L^r(\mu)$ y la elección de C satisface (3.19). □

Proposición 3.5.2. *Sea $1 \leq p \leq \infty$. Si μ es una medida finita, entonces $L^\infty(\mu)$ es un subespacio denso de $L^p(\mu)$.*

Demostración. Claramente $L^\infty(\mu)$ es denso en sí mismo. Por lo cual, consideremos $1 \leq p < \infty$.

Sea $f \in L^p(\mu)$ y supongamos que $f \geq 0$. Por el teorema 3.3.1, existe una sucesión de funciones simples $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset L^\infty(\mu)$ tales que

$$0 \leq s_n \leq f, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad s_n(x) \to f(x), \quad \forall\, x \in \Omega.$$

Dado que $|f - s_n|^p \leq 2^{p-1}(|f|^p + |s_n|^p) \leq 2^p\,|f|^p$, el teorema de convergencia dominada implica que

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |f - s_n|^p \, d\mu = 0. \tag{3.20}$$

Para el caso general, tomemos $g \in L^p(\mu)$. Recordemos que

$$g = \operatorname{Re} g^+ - \operatorname{Re} g^- + i\left(\operatorname{Im} g^+ - \operatorname{Im} g^-\right).$$

donde $\operatorname{Re} g^{\pm}$ e $\operatorname{Im} g^{\pm}$ son funciones no-negativas y p-integrables. Por lo demostrado anteriormente, existen sucesiones de funciones simples $\{u_n^{\pm}\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{v_n^{\pm}\}_{n\in\mathbb{N}}$ que satisfacen (3.20), respectivamente:

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \left|\operatorname{Re} g^{\pm} - u_n^{\pm}\right|^p \, d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_\Omega \left|\operatorname{Im} g^{\pm} - v_n^{\pm}\right|^p \, d\mu = 0. \tag{3.21}$$

Sea $h_n = u_n^+ - u_n^- + i(v_n^+ - v_n^-)$. Como $|h_n| \leq |u_n^+| + |u_n^-| + |v_n^+| + |v_n^-|$ y estas últimas son funciones simples, entonces $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset L^\infty(\mu)$. Además,

$$\begin{aligned}|g-h_n|^p \leq 2^{2p-2}\big(\left|\operatorname{Re} g^+ - u_n^+\right|^p + \left|\operatorname{Re} g^- - u_n^-\right|^p + \left|\operatorname{Im} g^+ - v_n^+\right|^p \\ + \left|\operatorname{Im} g^- - v_n^-\right|^p \big).\end{aligned}$$

Con (3.21) se sigue que $\|g-h_n\|_p \to 0$, lo cual muestra lo deseado. □

Teorema 3.5.2. *El espacio $L^p(\Omega)$ es separable.*

3.6. Teorema de Radon-Nikodym

El siguiente objetivo es obtener una representación del espacio dual $L^p(\Omega)^*$, para $1 < p < \infty$. En el resto del capítulo, q denotará al exponente conjugado de p.

Sea $g \in L^q(\Omega)$. Definamos $Rg : L^p(\Omega) \to \mathbb{C}$ por

$$Rg(f) := \int_\Omega f\,\overline{g}\,dm, \qquad \forall\, f \in L^p(\Omega). \tag{3.22}$$

De la desigualdad de Hölder se sigue que

$$|Rg(f)| \leq \|g\|_q \|f\|_p, \qquad \forall\, f \in L^p(\Omega).$$

Entonces Rg está bien definida y es un funcional lineal acotado, con

$$\|Rg\|_{L^p(\Omega)^*} \leq \|g\|_q. \tag{3.23}$$

De esta forma, dada un elemento de $L^q(\Omega)$ obtenemos un funcional de $L^p(\Omega)$. Consideremos entonces la función antilineal

$$\begin{aligned} R \,:\, L^q(\Omega) &\to L^p(\Omega) \\ g &\mapsto Rg. \end{aligned}$$

La función R marca el camino a seguir para obtener una representación del espacio dual: veamos que R es una biyección isométrica. Sin embargo, la dificultad se encuentra en demostrar que R es suprayectiva. Para ello, es necesario estudiar primero una herramienta fundamental en teoría de la medida: el teorema de Radon-Nikodym. La idea es que dado un funcional lineal de $L^p(\Omega)$, le asociamos una medida, y el teorema de Radon-Nikodym, a su vez, asocia a la medida inducida con una integral de la forma (3.22); justamente lo buscado para probar la suprayectividad de R. Comenzamos introduciendo algunos conceptos preliminares.

Definición 3.6.1. Sea (Ω, Σ) un espacio medible. Una *medida real* es una función $\lambda : \Sigma \to [0, \infty)$ que es *σ-aditiva*. Por otra parte, una función σ-aditiva $\nu : \Sigma \to \mathbb{C}$ es una *medida compleja*.

Notemos que las medidas reales son medidas complejas.

Ejemplo 3.6.1. Sea $f \in L^1(\mu)$. Definamos la función compleja

$$\nu_f(E) := \int_E f \, d\mu, \qquad \forall\, E \in \Sigma. \tag{3.24}$$

La proposición 3.3.1 implica que ν_f es σ-aditiva, y por ende una medida compleja. Notemos que si f es una función no-negativa, entonces ν_f es una medida positiva, aunque no necesariamente real.

La función f no es la única función integrable que induce a la medida ν_f, pues si $g = f$ c.t.p., entonces $\nu_f = \nu_g$.

Sin embargo, si f y g son dos funciones integrables para las cuales el conjunto medible $\{x \in \Omega \,|\, f(x) \neq g(x)\}$ tiene medida positiva, la contrapositiva de la proposición 3.3.3 implica que existe un conjunto medible E para el cual $\nu_f(E) \neq \nu_g(E)$.

A fin de generalizar los resultados que se tienen para medidas positivas, es conveniente descomponer una medida compleja en medidas positivas. Para ello definimos a continuación la medida de variación.

Definición 3.6.2. Sea ν una medida compleja en (Ω, Σ). Definimos la *variación* de ν por

$$|\nu| := \sup \sum_{n=1}^{\infty} |\nu(E_n)|\,, \qquad \forall\, E \in \Sigma,$$

tomando el supremo sobre las particiones numerables $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de E.

La variación $|\nu|$ es una medida positiva y finita. Además, satisface que

$$|\nu(E)| \leq |\nu|\,(E), \qquad \forall\, E \in \Sigma.$$

En el caso de una medida real λ, definimos las medidas positivas y finitas

$$\lambda^+ = \tfrac{1}{2}\left(|\lambda| + \lambda\right), \quad \lambda^- = \tfrac{1}{2}\left(|\lambda| - \lambda\right).$$

Las funciones λ^+ y λ^- son las *variaciones positiva y negativa*, respectivamente, y con ellas podemos formar la *descomposición de Jordan* de la medida real λ:

$$\lambda = \lambda^+ - \lambda^-, \quad |\lambda| = \lambda^+ + \lambda^-.$$

En el caso de una medida compleja ν, notemos que las partes real e imaginaria de la función ν son medidas reales. Si escribimos $\lambda_1 := \operatorname{Re} \nu$ y $\lambda_2 := \operatorname{Im} \nu$, entonces ν se expresa en términos de medidas positivas y finitas como

$$\nu = (\lambda_1^+ - \lambda_1^-) + i(\lambda_2^+ - \lambda_2^-). \tag{3.25}$$

Definición 3.6.3. Sea (Ω, Σ) un espacio medible. En este, sea μ una medida positiva y ν una medida positiva o compleja. La medida ν es *absolutamente continua* con respecto a μ, y escribimos $\nu << \mu$, si

$$\mu(E) = 0 \Rightarrow \nu(E) = 0, \qquad \forall E \in \Sigma.$$

Ejemplo 3.6.2. Sea $f \in L^1(\mu)$ y ν_f la medida compleja inducida por f, definida en el ejemplo 3.6.1. Si $E \in \Sigma$ es de medida cero, entonces

$$\nu_f(E) = \int_E f\, d\mu = 0. \tag{3.26}$$

Por lo tanto $\nu_f << \mu$.

A continuación que todas las medidas absolutamente continuas respecto μ son de la forma (3.26).

Teorema 3.6.1 (Radon-Nikodym para medidas positivas)**.** *Sean μ y ν medidas positivas y finitas en un espacio medible (Ω, Σ). Si $\nu << \mu$, entonces existe una función h real e integrable tal que*

$$\nu(E) = \int_E h\, d\mu, \qquad \forall E \in \Sigma. \tag{3.27}$$

La función h es única salvo conjuntos de medida cero.

Demostración. Consideremos la medida $\sigma = \mu + \nu$ y observemos que σ es una medida positiva y finita, pues

$$0 \leq \sigma(E) = \mu(E) + \nu(E) < \infty, \qquad \forall E \in \Sigma.$$

Entonces,

$$\int_\Omega \chi_E\, d\sigma = \int_\Omega \chi_E\, d\mu + \int_\Omega \chi_E\, d\nu.$$

De la construcción de la integral se sigue que si f es medible y no-negativa, entonces

$$\int_\Omega f\, d\sigma = \int_\Omega f\, d\mu + \int_\Omega f\, d\nu. \tag{3.28}$$

En particular,

$$\int_\Omega f\, d\sigma \geq \int_\Omega f\, d\nu, \qquad \int_\Omega f\, d\sigma \geq \int_\Omega f\, d\mu.$$

Así que, cuando $f \in L^1(\sigma)$ entonces f es integrable bajo las medidas μ y ν. Teniendo presente que f es integrable si, y sólo si, $|f|$ lo es, obtenemos que $L^1(\sigma) \subset L^1(\mu)$ y $L^1(\sigma) \subset L^1(\nu)$.

Sea $\phi : L^2(\sigma) \to \mathbb{C}$ el funcional lineal dado por

$$\phi f = \int_\Omega f\, d\nu, \qquad \forall f \in L^2(\sigma).$$

Como $L^2(\sigma) \subset L^1(\sigma) \subset L^1(\nu)$, el funcional ϕ está bien definido.

Tomemos $f \in L^2(\sigma)$. Utilizando (3.28) y la desigualdad de Cauchy-Schwarz obtenemos que

$$\begin{aligned} \left| \int_\Omega f \, d\nu \right| &\leq \int_\Omega |f| \, d\nu \\ &\leq \int_\Omega |f| \, d\sigma \\ &\leq \sigma(\Omega)^{1/2} \left(\int_\Omega |f|^2 \, d\sigma \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Por hipótesis $\sigma(\Omega) < \infty$. De esto se sigue que $\phi \in L^2(\sigma)^*$.

Recordemos que $L^2(\sigma)$ es un espacio de Hilbert, por lo cual tenemos una representación de su espacio dual. Así, por el teorema de representación de Riesz existe un único $g \in L^2(\sigma)$ tal que, para todo $f \in L^2(\sigma)$, $\phi f = \langle f, \overline{g} \rangle$. Es decir,

$$\int_\Omega f \, d\nu = \int_\Omega f g \, d\sigma. \tag{3.29}$$

Como $f, g \in L^2(\sigma) \subset L^1(\sigma)$, de (3.28) se sigue que podemos expresar (3.29) como

$$\int_\Omega (1-g) f \, d\nu = \int_\Omega f g \, d\mu, \qquad \forall \, f \in L^2(\sigma). \tag{3.30}$$

A continuación propondremos la función h de (3.27). Sea $E \in \Sigma$ tal que $\sigma(E) > 0$. Utilizando (3.29) con la función característica χ_E tenemos que,

$$\nu(E) = \int_E g \, d\sigma.$$

Como $0 \leq \nu \leq \sigma$, entonces

$$0 \leq \frac{1}{\sigma(E)} \int_E g \, d\sigma = \frac{\nu(E)}{\sigma(E)} \leq 1.$$

La proposición 3.3.4 implica que $0 \leq g \leq 1$ σ-c.t.p. Puesto que $g \in L^2(\sigma)$, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $0 \leq g(x) \leq 1$, $\forall \, x \in \Omega$. De esta forma obtenemos una partición de Ω respecto a la función g:

$$A := \{x \in \Omega \,|\, 0 \leq g(x) < 1\}, \qquad B := \{x \in \Omega \,|\, g(x) = 1\}.$$

Con $f = \chi_B$, a partir de (3.30) tenemos

$$\mu(B) = \int_B g \, d\mu = \int_B (1-g) \, d\nu = 0.$$

Luego, la continuidad absoluta de ν respecto a μ implica que $\nu(B) = 0$ y $\sigma(B) = 0$. Así que $0 \leq g < 1$ c.t.p.

Ahora bien, sea $E \in \Sigma$. Como $0 \leq g \leq 1$ y $g \in L^2(\sigma)$, entonces $(1+g+\ldots+g^n)\chi_E \in L^2(\sigma)$. Sustituyendo esta función en (3.30) obtenemos que:

$$\int_E (1-g^{n+1})\, d\nu = \int_E g(1+g+\ldots+g^n)\, d\mu. \tag{3.31}$$

Como $0 \leq g < 1$ c.t.p., tenemos que $g^{n+1}(x) \to 0$ monótonamente ν-c.t.p. Entonces,

$$\lim_{n\to\infty} \int_E (1-g^{n+1})\, d\nu = \nu(E). \tag{3.32}$$

Por otra parte, la sucesión de funciones $\{g(1+g+\ldots+g^n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ incrementa monótonamente a la función medible no-negativa $h = \frac{g}{1-g}$. Utilizando el teorema de convergencia monótona,

$$\lim_{n\to\infty} \int_E g(1+g+\ldots+g^n)\, d\mu = \int_E h\, d\mu. \tag{3.33}$$

De (3.31), (3.32) y (3.33) concluimos (3.27).

Finalmente, observemos que la unicidad de h, salvo conjuntos de medida cero, se sigue del ejemplo 3.6.1. Además,

$$\int_\Omega h\, d\mu = \nu(\Omega) < \infty.$$

Por lo tanto $h \in L^1(\mu)$. □

Corolario 3.6.1 (Radon-Nikodym para medidas complejas)**.** *Sea μ una medida positiva y finita, y sea ν una medida compleja. Si $\nu << \mu$, entonces existe un único $h \in L^1(\mu)$ tal que*

$$\nu(E) = \int_E h\, d\mu, \qquad \forall\, E \in \Sigma. \tag{3.34}$$

Demostración. Utilizando la descomposición de Jordan para una medida, expresemos la medida compleja ν en términos de medidas positivas y finitas

$$\nu = (\lambda_1^+ - \lambda_1^-) + i(\lambda_2^+ - \lambda_2^-). \tag{3.35}$$

Por el teorema de Radon-Nikodym para medidas positivas existen funciones reales $h_1^+, h_1^-, h_2^+, h_2^- \in L^1(\mu)$ tales que

$$\lambda_j^\pm(E) = \int_E h_j^\pm\, d\mu, \qquad \forall\, E \in \Sigma. \tag{3.36}$$

Sea $h = (h_1^+ - h_1^-) + i(h_2^+ - h_2^-)$. Como $L^1(\mu)$ es un espacio vectorial complejo, entonces $h \in L^1(\mu)$. Además, de (3.35) y (3.36) vemos que para $E \in \Sigma$,

$$\nu(E) = (\lambda_1^+(E) - \lambda_1^-(E)) + i(\lambda_2^+(E) - \lambda_2^-(E)) = \int_E h\, d\mu.$$

□

3.7. Representación del espacio dual

En la sección anterior definimos la función antilineal $R : L^q(\Omega) \to L^p(\Omega)^*$. A cada $g \in L^q(\Omega)$ se le asignó el funcional lineal

$$Rg(f) = \int_\Omega f\,\overline{g}\,dm, \qquad \forall f \in L^p(\Omega).$$

El siguiente teorema prueba que R es una isometría suprayectiva. Entonces $L^p(\Omega)^*$ es isométricamente isomorfo a $L^q(\Omega)$.

Teorema 3.7.1. *Sea μ una medida finita, $1 < p < \infty$ y q su exponente conjugado. Entonces, para cada $\phi \in L^p(\mu)^*$ existe una única $g \in L^q(\mu)$ tal que $\phi = Rg$, esto es*

$$\phi f = \int_\Omega f\,\overline{g}\,d\mu, \qquad \forall\, f \in L^p(\mu).$$

Más aún, $\|\phi\|_{L^p(\Omega)^*} = \|g\|_q$.

Demostración. Sea $\phi \in L^p(\mu)^*$. A partir del funcional ϕ, definamos una medida compleja. Consideremos la función compleja

$$\nu(E) := \phi(\chi_E), \qquad \forall\, E \in \Sigma.$$

Si A y B son conjuntos medibles disjuntos, entonces $\chi_A + \chi_B = \chi_{A\cup B}$. Junto a la linealidad de ϕ, se sigue que ν es aditiva. Sea $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma$ una colección de conjuntos disjuntos entre sí, con $E = \cup_{n\,\in\,\mathbb{N}} E_n$. Escribamos $A_k = E_1 \cup \ldots \cup E_k$. Dado que $A_k \subset A_{k+1}$,

$$\lim_{k\to\infty} \|\chi_E - \chi_{A_k}\|_p = \lim_{k\to\infty} \mu(E \setminus A_k)^{1/p} = 0.$$

Luego, la continuidad de ϕ en $L^p(\mu)$ implica que

$$\lim_{k\to\infty} \nu(A_k) = \lim_{k\to\infty} \phi(\chi_{A_k}) = \phi(E) = \nu(E).$$

Esto prueba que ν es σ-aditiva, y obtenemos que ν es una medida compleja. Además, notemos que si $\mu(E) = 0$, entonces $\chi_E = 0$ μ-c.t.p., lo cual implica que $\nu(E) = \phi(\chi_E) = 0$. Por lo tanto, ν es una medida absolutamente continua respecto a μ. Entonces, por el teorema de Radon-Nikodym existe una única $g \in L^1(\mu)$ tal que, para todo $E \in \Sigma$

$$\phi(\chi_E) = \int_E \overline{g}\,d\mu = \int_\Omega \chi_E\,\overline{g}\,d\mu. \tag{3.37}$$

A partir de esta igualdad para funciones características, la estableceremos para todo función en $L^p(\mu)$.

Si s es una función simple, de la linealidad de ϕ y la integral, (3.37) implica que

$$\phi(s) = \int_\Omega s\,\overline{g}\,d\mu. \tag{3.38}$$

Si $f \in L^\infty(\mu)$, por el teorema 3.3.1 existe una sucesión de funciones simples $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $s_n \to f$ uniformememente c.t.p. La convergencia uniforme, y que la medida μ es finita, implican que $\|s_n - f\|_p \to 0$. Luego, por la continuidad de ϕ, $\phi(s_n) \to \phi(f)$. Con (3.38) y la convergencia uniforme,

$$\phi(f) = \lim_{n\to\infty} \phi(s_n) = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega s_n\, \overline{g}\, d\mu = \int_\Omega f\, \overline{g}\, d\mu.$$

Por lo tanto,

$$\phi(f) = \int_\Omega f\, \overline{g}\, d\mu, \qquad \forall\, f \in L^\infty(\mu). \tag{3.39}$$

Para extender la igualdad anterior del subespacio denso $L^\infty(\mu)$ a $L^p(\mu)$ necesitamos establecer que el funcional dado por

$$Rg(f) = \int_\Omega f\, \overline{g}\, d\mu, \qquad \forall\, f \in L^p(\mu), \tag{3.40}$$

está bien definido y es continuo en $L^p(\mu)$. Para ello veamos que $g \in L^q(\mu)$.

Sea $\alpha : \Omega \to \mathbb{C}$ dada por

$$\alpha(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } g(x) = 0 \\ |g(x)| \,/\overline{g(x)} & \text{si } g(x) \neq 0. \end{cases}$$

Considerando $A = \{x \in \Omega \,|\, g(x) = 0\}$ y A^c, es claro que α es una función medible. Además, satisface que $\alpha\, \overline{g} = |g|$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $E_n = \{x \in \Omega \,|\, |g(x)| \le n\}$, y definamos $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$ por

$$f_n := \chi_{E_n} |g|^{q-1} \alpha.$$

Por construcción, $f_n \in L^\infty(\mu)$. Así que se satisface (3.39), y teniendo presente la continuidad de ϕ y que $|f|^p = |g|^q$, $\forall\, x \in E_n$, obtenemos:

$$\begin{aligned} \int_{E_n} |g|^q \; d\mu &= \int_\Omega \chi_{E_n} |g|^{q-1} (\alpha\, \overline{g})\, d\mu \\ &= \int_\Omega f_n\, \overline{g}\, d\mu \\ &= \phi(f_n) \\ &\le \|\phi\| \left(|f|^p\right)^{1/p} \\ &= \|\phi\| \left(|g|^q\right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Luego,

$$\int_\Omega \chi_{E_n} |g|^q \; d\mu \le \|\phi\|^q, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Claramente $0 \le \chi_{E_n} |g|^q \le \chi_{E_{n+1}} |g|^q$ y $\chi_{E_n} |g|^q \to |g|^q$. Así que, el teorema de convergencia monótona implica que

$$\|g\|_q \le \|\phi\|. \tag{3.41}$$

Concluimos que $g \in L^q(\mu)$ y entonces $Rg \in L^p(\mu)^*$. Dado que μ es finita, de acuerdo a la proposición 3.5.2 $L^\infty(\mu)$ es un subespacio denso de $L^p(\mu)$. Con esto, de (3.39) se sigue que

$$\phi(f) = \int_\Omega f\,\overline{g}\,d\mu, \qquad \forall f \in L^p(\mu).$$

De (3.41) y la desigualdad (3.23) obtenemos que $\|\phi\| = \|Rg\| = \|g\|_q$ $\square$

Capítulo 4

Espacios de Bergman

A continuación, $\Omega \subset \mathbb{C}$ denotará un dominio. Para $1 \leq p < \infty$, el espacio de Bergman $A^p(\Omega)$ consiste de las funciones analíticas y p-integrables en Ω respecto a la medida de Lebesgue dm; esto es,

$$\int_\Omega |f|^p \, dm < \infty.$$

El espacio $A^p(\Omega)$ es normado, y su norma es la inducida por $L^p(\Omega)$:

$$\|f\|_{A^p(\Omega)} := \left(\int_\Omega |f|^p \, dm \right)^{1/p}. \tag{4.1}$$

Resulta importante observar que existe un isomorfismo isométrico entre $A^p(\Omega)$ y un subespacio de $L^p(\Omega)$, aquel formado por las clases de equivalencia con un representante analítico. En ese sentido, y abusando de la notación,

$$A^p(\Omega) = L^p(\Omega) \cap H(\Omega). \tag{4.2}$$

Pensaremos entonces a los espacios de Bergman como subespacios de $L^p(\Omega)$.

4.1. Estructura

En esta sección estableceremos las propiedades básicas de la estructura de los espacios de Bergman. Los resultados se derivan del siguiente teorema, que da una cota para la evaluación en un punto de una función en el espacio de Bergman.

Teorema 4.1.1. *Sea Ω un dominio propio del plano complejo. Para cada $f \in A^p(\Omega)$ y $z \in \Omega$,*

$$|f(z)| \leq (\pi R^2)^{-1/p} \|f\|_{A^p(\Omega)}, \tag{4.3}$$

donde $R := \operatorname{dist}(z, \partial\Omega)$.

Demostración. Sea $z \in \Omega$ y tomemos $r \in (0, R)$. Por ser R la distancia del punto z a la frontera de Ω, entonces $D_r(z) \subset \Omega$. Puesto que f es analítica en Ω, al utilizar la fórmula integral de Cauchy sobre la circunferencia $C_r(z)$, tenemos que

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r(z)} \frac{f(w)}{w-z}\, dm(w) \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(z+re^{it})}{(z+re^{it})-z}(ire^{it})\, dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z+re^{it})\, dt. \end{aligned}$$

Luego, por la desigualdad del triángulo:

$$2\pi|f(z)| \leq \int_0^{2\pi} |f(z+re^{it})|\, dt.$$

Lo siguiente es multiplicar por r e integrar respecto al radio:

$$2\pi \int_0^R r|f(z)|\, dr = \int_0^R \int_0^{2\pi} |f(z+re^{it})r|\, dt\, dr$$

La primera integral es fácil de calcular. Para la integral de la derecha hacemos un cambio de coordenadas polares y obtenemos una integral de área en $D_R(z)$. En el caso $p > 1$, donde q es su exponente conjugado, aplicamos la desigualdad de Hölder. Se obtiene así que,

$$\begin{aligned} \pi R^2|f(z)| &\leq \int_{D_R(z)} |f(w)|\, dm \\ &\leq \left(\int_{D_R(z)} |f(w)|^p\, dm\right)^{1/p} \left(\int_{D_R(z)} dm\right)^{1/q} \\ &\leq \left(\int_{\Omega} |f(w)|^p\, dm\right)^{1/p} (\pi R^2)^{1/q} \\ &= (\pi R^2)^{1/q}\|f\|_{A^p(\Omega)}. \end{aligned}$$

Mientras que en el caso $p = 1$,

$$\begin{aligned} \pi R^2|f(z)| &\leq \int_{D_R(z)} |f(w)|\, dm \\ &\leq \int_{\Omega} |f(w)|\, dm \\ &= \|f\|_{A^p(\Omega)}. \end{aligned}$$

De las desigualdades anteriores, dependiendo el caso, obtenemos lo deseado. $\square$

Ejemplo 4.1.1. El espacio $A^p(\mathbb{C})$.

Sea $f \in A^p(\mathbb{C})$ y tomemos $z \in \mathbb{C}$, $r > 0$. Si $R = r^p/\sqrt{\pi}$, claramente $D_R(z) \subset \mathbb{C}$. Procediendo como en la demostración del teorema 4.1.1,

$$|f(z)| \leq \frac{1}{r}\|f\|.$$

Haciendo $r \to \infty$, obtenemos que $f \equiv 0$. Así, concluimos que $A^p(\mathbb{C}) = \{0\}$.

Con motivo del ejemplo anterior, en lo sucesivo Ω es un dominio propio. Sin embargo, aún es posible que $A^p(\Omega)$ sea el espacio 0, lo cual no resulta de interés. L. Carleson ha dado una caracterización en [4] de los dominios Ω cuyo espacio de Bergman $A^2(\Omega)$ es no-trivial, sin embargo sus métodos escapan del alcance de este trabajo. Por otra parte, J. Wiegerinck ha demostrado que la dimensión de $A^2(\Omega)$ es cero, o bien, infinito (veáse [9]).

Para cada $z \in \Omega$, definimos el funcional evaluación $\delta_z : A^p(\Omega) \to \mathbb{C}$ por

$$\delta_z(f) := f(z), \qquad \forall f \in A^p(\Omega). \tag{4.4}$$

En los espacios normados, las desigualdades indican propiedades topológicas, así como la continuidad de operadores lineales. Este es el caso del teorema 4.1.1, del cual se deriva el siguiente resultado.

Corolario 4.1.1. *El funcional evaluación* $\delta_z : A^p(\Omega) \to \mathbb{C}$ *es un funcional lineal acotado de* $A^p(\Omega)$*, para todo* $z \in \Omega$*.*

Dada la importancia de los funcionales de evaluación, para algunos resultados necesitamos, no solamente que $A^2(\Omega) \neq \{0\}$, sino que $\delta_z \neq 0$, $\forall\, z \in \Omega$. Equivalentemente, que para cada $z \in \Omega$ exista una función $f \in A^2(\Omega)$ tal que $f(z) \neq 0$. En dos casos podemos asegurar que esta hipótesis se cumple, y son los que tendremos en mente:

I. Si Ω es un dominio acotado.

II. Si Ω es un dominio propio y simplemente conexo.

En efecto, si Ω es acotado, entonces los polinomios pertenecen al espacio $A^p(\Omega)$, y se satisface lo deseado. El caso de un dominio propio y simplemente conexo se estudia con detalle en la sección 4.6, pues la afirmación es consecuencia de la invariancia conforme de los espacios de Bergman.

Sin embargo, las condiciones anteriores no son necesarias para que el espacio de Bergman no sea trivial y que los funcionales de evaluación sean no-nulos. Esto lo muestra el siguiente ejemplo. Retomamos el dominio del ejemplo 1.6.4, que no es acotado ni simplemente conexo.

Ejemplo 4.1.2. Sea $\Omega = \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$. Dado $1 \leq p < \infty$, veamos que $\dim A^p(\Omega) = \infty$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos la función

$$f_n(z) = z^{-3n}, \qquad \forall\, z \in \Omega.$$

Claramente $f_n \in H(\Omega)$. Para probar que f_n es p-integrable, primero estimemos la integral correspondiente en el conjunto medible $A_k = D_{k+1} \setminus \overline{D_k}$, con $k \in \mathbb{N}$. Por construcción, si $z \in A_k$, entonces $|z| > k$ se sigue que

$$\begin{aligned}\int_{A_k} |f_n|^p \, dm &= \int_{A_k} \left|z^{-3n}\right|^p \, dm \\ &= \int_{A_k} |z|^{-3np} \, dm \\ &\leq \int_{A_k} k^{-3np} \, dm \\ &= \pi(2k+1)k^{-3np}.\end{aligned}$$

Luego, como $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una partición medible de Ω:

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} |f_n|^p \, dm &= \sum n \int_{A_k} |f_n|^p \, dm \\ &\leq \pi \sum n \frac{2k+1}{k^{3np}} \\ &< \infty.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A^p(\Omega)$, y concluimos que $\dim A^p(\Omega) = \infty$. Además, observemos que

$$f_1(z) \neq 0, \qquad \forall\, z \in \Omega.$$

Entonces todos los funcionales de evaluación son distintos de cero, es decir

$$\delta_z \neq 0, \qquad \forall\, z \in \Omega.$$

Corolario 4.1.2. *Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A^p(\Omega)$ una sucesión convergente a $f \in A^p(\Omega)$. Entonces, $f_n \to f$ uniformemente en compactos de Ω. Asimismo, si $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $A^p(\Omega)$, entonces también es uniformemente de Cauchy en compactos de Ω.*

Demostración. Sea $K \subset \Omega$ un compacto no-vacío y $r := \operatorname{dist}(K, \partial\Omega)$. Como K es compacto y la función distancia es continua, existe $k \in K$ tal que $\operatorname{dist}(k, \partial\Omega) = r$. Observando que $K \cap \partial\Omega \subset \Omega \cap \partial\Omega = \varnothing$, se sigue que $r > 0$.

Luego, el teorema 4.1.1 implica que para cualesquier $n, m \in \mathbb{N}$:

$$|f(x) - f_n(x)| \leq (\pi r^2)^{-1/p} \|f - f_n\|, \qquad \forall\, x \in K, \text{ y}$$

$$|g_n(x) - g_m(x)| \leq (\pi r^2)^{-1/p} \|g_n - g_m\|, \qquad \forall\, x \in K,$$

lo cual prueba lo deseado. □

Teorema 4.1.2. *El espacio $A^p(\Omega)$ es completo. En consecuencia, $A^p(\Omega)$ es un espacio de Banach, y $A^2(\Omega)$ es un espacio de Hilbert.*

Demostración. Dado que el espacio $L^p(\Omega)$ es completo, es suficiente probar que $A^p(\Omega)$ es un subespacio cerrado de $L^p(\Omega)$.

Sea $\{f_n\} \subset A^p(\Omega)$ una sucesión convergente a $f \in L^p(\Omega)$. El corolario 3.5.1 muestra que existe una subsucesión $\{f_{n(k)}\}$ que converge c.t.p. a f. Por otra parte, tenemos que $\{f_n\}$ es una sucesión de Cauchy en $A^p(\Omega)$. Del corolario 4.1.2 se sigue que $\{f_n\}$ es uniformemente de Cauchy en compactos de Ω. Luego, la proposición 1.4.1 implica que $\{f_n\}$ converge uniformemente en compactos a un función $g : \Omega \to \mathbb{C}$, y dado que cada f_n es analítica, la proposición 1.4.2 implica que g también es analítica. En particular, $f_{n(k)} \to g$ puntualmente. Por lo tanto $f = g$ c.t.p., mostrando así que $f \in A^p(\Omega)$. □

Indicaremos enseguida una propiedad elemental de los espacios de Bergman, que heredan del espacio $L^p(\Omega)$. De acuerdo al teorema 3.5.2 el espacio $L^p(\Omega)$ es separable, y por tanto también sus subespacios. Obtenemos entonces la siguiente proposición.

Proposición 4.1.1. *El espacio de Bergman $A^p(\Omega)$ es separable.*

4.2. El espacio $A^2(\Omega)$ y el núcleo de Bergman

A cada dominio dominio Ω lo asociamos con su espacio de Bergman $A^2(\Omega)$. Uno de los objetivos generales es estudiar como la geometría del dominio Ω se refleja en la estructura del espacio $A^2(\Omega)$, y viceversa.

La teoría elemental de los espacios de Hilbert nos sugiere estudiar al espacio $A^2(\Omega)$ a partir de tres herramientas fundamentales: el teorema de representación de Riesz, las bases ortonormales y la existencia de una solución a ciertos problemas de minimización. Esta sección se dedicará a los resultados que se obtengan de estos planteamientos.

El primer resultado es la existencia de un núcleo reproductor. La construcción depende de la continuidad de los funcionales de evaluación. Como elementos del espacios dual, se representan por medio del teorema de representación de Riesz.

Fijemos $z \in \Omega$. De acuerdo al corolario 4.1.1, la evaluación puntual $\delta_z(f) := f(z)$ define un funcional lineal acotado. Luego, el teorema de representación de Riesz asegura que existe un único $k_z \in A^2(\Omega)$ tal que

$$f(z) = \delta_z(f) = \langle f, k_z \rangle, \qquad \forall f \in A^2(\Omega).$$

Es decir,

$$f(z) = \int_\Omega f(w)\, \overline{k_z(w)}\, dm(w), \qquad \forall\, f \in A^2(\Omega) \tag{4.5}$$

Definimos la función $K : \Omega \times \Omega \to \mathbb{C}$ por

$$K(z, w) := \overline{k_z(w)}, \qquad \forall z, w \in \Omega. \tag{4.6}$$

De esta forma, (4.5) muestra que K es un *núcleo reproductor*, esto es,

$$f(z) = \int_\Omega f(w) K(z, w)\, dm(w), \qquad \forall z \in \Omega, \forall f \in A^2(\Omega). \tag{4.7}$$

La función K recibe el nombre de *núcleo de Bergman de* Ω. A la igualdad (4.7) se le conoce como *fórmula reproductora.*

Proposición 4.2.1. *El núcleo de Bergman* $K : \Omega \times \Omega \to \mathbb{C}$ *satisface las siguientes propiedades.*

I. Es hermitiano, es decir,

$$K(z,w) = \overline{K(w,z)}, \qquad \forall\, w, z \in \Omega. \tag{4.8}$$

II. Para cada $w \in \Omega$*, la función* $z \mapsto K(z,w)$ *es analítica.*

III. $K(z,z) \geq 0, \quad \forall\, z \in \Omega$ *y* $\|k_z\| = \sqrt{K(z,z)}$*. Además, si el funcional* $\delta_z \neq 0$*, entonces* $K(z,z) > 0$*.*

IV. $|f(z)| \leq \sqrt{K(z,z)}\, \|f\|_{A^2(\Omega)}$*, para cada* $z \in \Omega$*.*

Demostración. I. Sean $z, w \in \Omega$. Recordemos que, de la construcción del núcleo de Bergman, $k_z \in A^2(\Omega)$. Entonces, podemos utilizar la fórmula reproductora y el comportamiento de la integral respecto a la conjugación para obtener lo siguiente:

$$\begin{aligned}
K(z,w) = \overline{k_z(w)} &= \overline{\int_\Omega k_z(\zeta) K(w,\zeta)\, dm(\zeta)} \\
&= \overline{\int_\Omega \overline{K(z,\zeta)} K(w,\zeta)\, dm(\zeta)} \\
&= \int_\Omega K(z,\zeta) \overline{K(w,\zeta)}\, dm(\zeta) \\
&= \int_\Omega k_w(\zeta) K(z,\zeta)\, dm(\zeta) \\
&= k_w(z) = \overline{K(w,z)}.
\end{aligned}$$

II. Fijemos $w \in \Omega$. Del inciso anterior se sigue que

$$K(z,w) = \overline{K(w,z)} = k_w(z),$$

la cual es una función analítica en el espacio de Bergman.

III. Utilizamos nuevamente la fórmula reproductora. Se obtiene que

$$\begin{aligned}
K(z,z) = \overline{k_z(z)} &= \overline{\int_\Omega k_z(w) K(z,w)\, dm(w)} \\
&= \int_\Omega \overline{k_z(w) K(z,w)}\, dm(w) \\
&= \int_\Omega K(z,w) \overline{K(z,w)}\, dm(w) \\
&= \|k_z\|^2_{A^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Entonces $K(z,z) \geq 0$. Por otra parte, tenemos que k_z es la representación en $A^2(\Omega)$ del funcional δ_z. Así que, cuando $\delta_z \neq 0$ tenemos que

$$\sqrt{K(z,z)} = \|k_z\|_{A^2(\Omega)} = \|\delta_z\|_{A(\Omega)^*} \neq 0. \tag{4.9}$$

IV. Expresemos $f(z)$ con la fórmula reproductora. Usando la la desigualdad de Schwarz y el inciso anterior, obtenemos:

$$\begin{aligned} |f(z)| &= |\langle f, k_z \rangle| \\ &\leq \|f\|_{A^2(\Omega)} \|k_z\|_{A^2(\Omega)} \\ &= \sqrt{K(z,z)}\, \|f\|_{A^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

□

Observemos que la fórmula reproductora, expresa en (4.7), define un operador integral en $L^2(\Omega)$. Continuando con las propiedades del núcleo de Bergman, veamos la relación de este operador integral con $A^2(\Omega)$.

En la demostración del teorema 4.1.2 se vio que $A^2(\Omega)$ es un subespacio cerrado de $L^2(\Omega)$. Entonces, el teorema 2.6.1 implica que existe una proyección ortogonal B de $L^2(\Omega)$ sobre $A^2(\Omega)$. La siguiente proposición indica que la fórmula reproductora (4.7) está definida en $L^2(\Omega)$, y además, el operador integral que induce es la proyección ortogonal B.

Proposición 4.2.2. *Sea $B : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ la proyección ortogonal sobre $A^2(\Omega)$. Entonces, para $f \in L^2(\Omega)$*

$$Bf(z) = \int_\Omega f(w) K(z,w)\, dm(w), \qquad \forall\, z \in \Omega.$$

Demostración. Sea $f \in L^2(\Omega)$. Como B es una proyección ortogonal, entonces es un operador autoadjunto. Utilizando también la fórmula reproductora y que $Bk_z = k_z$, tenemos que

$$\begin{aligned} Bf(z) &= \langle Bf, k_z \rangle \\ &= \langle f, Bk_z \rangle \\ &= \langle f, k_z \rangle \\ &= \int_\Omega f(w)\, \overline{k_z(w)}\, dm \\ &= \int_\Omega f(w) K(z,w)\, dm(w). \end{aligned}$$

□

4.3. Representación del núcleo de Bergman

Así como la serie de Fourier expresa un elemento, en un espacio de Hilbert dado, en términos de una base ortonormal, a continuación encontraremos la representación correspondiente al núcleo de Bergman de Ω.

El espacio de Bergman $A^2(\Omega)$ es un espacio de Hilbert separable, por ser un subespacio de $L^2(\Omega)$. Luego, la proposición 2.7.2 implica que existe una base ortonormal finita o contable de $A^2(\Omega)$. Para simplificar la notación supondremos que la base es contable. En adelante denotaremos $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Lema 4.3.1. *Supongamos que $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ es una base ortonormal de $A^2(\Omega)$. Entonces, para cada $f \in A^2(\Omega)$, su serie de Fourier*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \langle f, e_n \rangle e_n \tag{4.10}$$

converge a f uniformemente en compactos de Ω.

Demostración. Al ser $\{e_n\}$ una base ortonormal de $A^2(\Omega)$, por el corolario 2.7.1, la serie de Fourier de f respecto a $\{e_n\}$ converge a f en la norma de $A^2(\Omega)$. Luego, el corolario 4.1.2 implica que la serie (4.10) converge a f uniformemente en compactos de Ω. □

Teorema 4.3.1. *Supongamos que $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ es una base ortonormal de $A^2(\Omega)$. Entonces, el núcleo de Bergman de Ω tiene la representación*

$$K(z,w) = \sum_{n=0}^{\infty} e_n(z)\overline{e_n(w)}, \qquad \forall\, z, w \in \Omega. \tag{4.11}$$

Demostración. Fijemos $z \in \Omega$. Por el lema 4.3.1, la serie de Fourier de $k_z \in A^2(\Omega)$ converge uniformemente en compactos. En particular, converge puntualmente. Así que, para $w \in \Omega$:

$$k_z(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle k_z, e_n \rangle e_n(w). \tag{4.12}$$

Luego,

$$K(z,w) = \overline{k_z(w)} = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{\langle k_z, e_n \rangle}\, \overline{e_n(w)}.$$

A partir de la fórmula reproductora podemos calcular los coeficientes de Fourier. Para $n \in \mathbb{N}_0$:

$$\begin{aligned} \overline{\langle k_z, e_n \rangle} = \langle e_n, k_z \rangle &= \int_\Omega e_n(w)\overline{k_z(w)}\, dm(w) \\ &= \int_\Omega e_n(w) K(z,w)\, dm(w) \\ &= e_n(z). \end{aligned}$$

Sustituyendo en la igualdad (4.12), obtenemos la conclusión. □

Si bien la representación (4.11) depende de la base ortonormal $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, el núcleo de Bergman de Ω es independiente de ella. Suponiendo que existe otra base ortonormal $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, tenemos que para cualesquier $z, w \in \Omega$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} e_n(z)\,\overline{e_n(w)} = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(z)\,\overline{u_n(w)}.$$

Las siguientes secciones profundizan en la independencia del núcleo de Ω, de estructuras particulares de la teoría de los espacios de Hilbert. En cambio, tiene una relación intrínseca con la geometría del dominio.

4.4. Problemas de minimización en $A^2(\Omega)$

Al examinar la demostración del teorema de representación de Riesz, es evidente que esta depende de la solución a un problema de minimización: aquel que define una proyección ortogonal. Recordemos que el núcleo de Bergman se obtiene del teorema de representación de Riesz. Por ello, es natural que el núcleo de Bergman aparezca en la solución de los siguientes problemas de minimización.

El primer ejemplo de un problema de minimización es consecuencia inmediata de las propiedades del núcleo de Bergman de la proposición 4.2.1, y sirve como motivación.

Proposición 4.4.1. *Sea $w_0 \in \Omega$ un punto fijo y supongamos que el conjunto*

$$M = \{f \in A^2(\Omega)\,|\, f(w_0) = 1\}.$$

es no-vacío. Entonces, la función

$$h(z) = \frac{K(z, w_0)}{K(w_0, w_0)} \tag{4.13}$$

es la única solución al problema de minimización $\min\{\|f\|_{A^2(\Omega)}\,|\, f \in M\}$.

Demostración. Puesto que $M \neq \varnothing$, entonces $\delta_{w_0} \neq 0$ y por ello $K(w_0, w_0) > 0$. Consideremos la función

$$h := k_{w_0}/K(w_0, w_0).$$

Por el inciso (V) de la proposición 4.2.1,

$$\|h\|_{A^2(\Omega)} = K(w_0, w_0)^{-1/2}.$$

Y del inciso (IV) de la misma proposición, tenemos que

$$\|f\|_{A^2(\Omega)} \geq K(w_0, w_0)^{-1/2}, \qquad \forall\, f \in M.$$

Se sigue que, $\|h\| = \min\{\|f\|_{A^2(\Omega)}\,|\, f \in M\}$.

Finalmente, dado que $M = \delta_{w_0}^{-1}(1)$, entonces el conjunto M es cerrado, convexo y, por hipótesis, no vacío. La proposición 2.6.1 implica la unicidad de la solución. $\square$

Para obtener una generalización del resultado anterior, es necesario regresar a la herramienta elemental de un espacio de Hilbert: las proyecciones ortogonales sobre subespacios cerrados.

Teorema 4.4.1. *Sean $w_1, \ldots, w_n \in \Omega$ puntos distintos y $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$. Si el conjunto*

$$M = \{f \in A^2(\Omega) \mid f(w_j) = \alpha_j,\, j = 1, \ldots, n\},$$

es no-vacío, entonces existe una única solución al problema de minimización

$$\text{mín}\{\|f\|_{A^2(\Omega)} \mid f \in M\}. \tag{4.14}$$

Además, la solución es de la forma

$$h(z) = \sum_{j=1}^{n} c_j K(z, w_j), \qquad \forall\, z \in \Omega, \tag{4.15}$$

donde $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$ son constantes determinadas por $w_1, \ldots, w_n$.

Demostración. Por hipótesis $M \neq \varnothing$, entonces existe $p \in M$. Consideremos la traslación de M

$$M_0 := \{f \in A^2(\Omega) \mid f(w_j) = 0,\, j = 1, \ldots, n\}.$$

Este es un subespacio cerrado de $A^2(\Omega)$, pues $M_0 = \cap_{j=1}^{n} \delta_{w_j}^{-1}(0)$. Luego, por el teorema 2.6.1, existe una proyección ortogonal $R : A^2(\Omega) \to A^2(\Omega)$ sobre M_0. Por ser R una proyección ortogonal, de acuerdo a la proposición 2.6.1, Rp es el único elemento de M_0 que satisface lo siguiente:

$$\|p - Rp\| = \text{dist}_{A^2(\Omega)}(p, M_0).$$

Además, como M_0 un subespacio vectorial para el cual $M = p + M_0$,

$$\text{dist}_{A^2(\Omega)}(p, M_0) = \inf_{x \in M_0} \|p - x\| = \inf_{x \in M_0} \|p + x\| = \inf_{f \in M} \|f\|.$$

Por lo tanto, $h := p - Rp \in M$ es la única solución al problema de minimización. Notemos que al ser R una proyección ortogonal sobre M_0, entonces $h = p - Rp \in M_0^{\perp}$.

Lo siguiente es caracterizar a la solución h a través de $M_0^{\perp}$. Sea

$$N := \langle k_{w_1}, \ldots, k_{w_n} \rangle,$$

es decir, N es el subespacio de $A^2(\Omega)$ generado por $k_{w_1}, \ldots, k_{w_n}$. Tenemos que $f \in M_0$ si, y sólo si,

$$f(w_j) = 0, \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Y por la fórmula reproductora, esto sucede si, y sólo si,

$$f(w_j) = \langle f, k_{w_j} \rangle = 0, \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Que se presenta si, y sólo si, $f \in N^{\perp}$. Entonces $N^{\perp} = M_0$. Al ser N un subespacio vectorial cerrado, se sigue que $N = M_0^{\perp}$. De esta forma concluimos que $F \in N$, lo cual prueba lo deseado. $\square$

La hipótesis del teorema 4.4.1 es que el conjunto

$$M = \{f \in A^2(\Omega) \mid f(w_j) = \alpha_j,\ j = 1, \dots, n\}$$

sea no-vacío. Sin embargo, como se observó en la sección 4.1, esta condición no se satisface para cualquier espacio de Bergman.

Cuando el dominio Ω es acotado, entonces M es no-vacío. y se sigue que el teorema 4.4.1 es válido para dominios acotados, como probaremos enseguida. Notemos primero que los polinomios pertenecen al espacio de Bergman $A^2(\Omega)$. Después, si $w_1, \dots, w_n \in \Omega$ son puntos distintos, entonces el polinomio de Lagrange $p(z) = \sum_{j=1}^n \alpha_j L_j$, con $L_j(z) = \prod_{m=1,\, m\neq j}^n (z - w_m)/(w_j - w_m)$, satisface que $p(w_j) = \alpha_j$, para $j = 1, \dots, n$.

En particular, el teorema 4.4.1 es válido para $A^2(\mathbb{D})$. Así que, como consecuencia de la invariancia conforme y el teorema del mapeo de Riemann, si Ω es un dominio propio y simplemente conexo entonces M es distinto del vacío. Esta afirmación se probará con detalle en la sección 4.6.

4.5. El espacio $A^2(\mathbb{D})$

Las técnicas propias al estudiar funciones definidas en el disco unitario, como el cambio de variable a coordenadas polares y la representación como serie de potencias de las funciones analíticas en $\mathbb{D}$, permiten realizar cálculos explícitos del producto interior en $A^2(\mathbb{D})$. El objetivo es encontrar una base ortonormal de $A^2(\Omega)$, así como una representación explícita del núcleo de Bergman de $\mathbb{D}$.

Lema 4.5.1. *Sean $m, n \in \mathbb{N}_0$ y $r > 0$. Entonces,*

$$\int_{D_r} z^n\, \overline{z}^m dm = \begin{cases} 0 & si\ n \neq m, \\ \frac{\pi r^{2(n+1)}}{n+1} & si\ n = m. \end{cases} \tag{4.16}$$

Como consecuencia, los monomios son ortogonales.

Demostración. Realizamos un cambio de variable a coordenadas polares:

$$\begin{aligned} \int_{D_r} z^n\, \overline{z}^m dm &= \int_0^r \int_0^{2\pi} \left(s\mathrm{e}^{i\theta}\right)^n \left(s\mathrm{e}^{-i\theta}\right)^m s\, d\theta\, ds \\ &= \int_0^r s^{n+m+1} \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{i(n-m)\theta}\, d\theta\, ds. \end{aligned}$$

Si $n = m$, entonces

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{i(n-m)\theta}\, d\theta = \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^0\, d\theta = 2\pi.$$

Se sigue que

$$\int_0^r s^{n+m+1} \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{i(n-m)\theta}\, d\theta\, ds = \frac{2\pi r^{n+m+2}}{n+m+2} = \frac{\pi r^{2(n+1)}}{n+1}.$$

Por otra parte, cuando $n \neq m$ tenemos que

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{i(n-m)\theta}\, d\theta = \frac{1}{i(n-m)} \mathrm{e}^{i(n-m)\theta}\Big|_0^{2\pi} = 0.$$

Luego, en este caso:

$$\int_0^r s^{n+m+1} \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{i(n-m)\theta}\, d\theta\, ds = 0.$$

□

Lema 4.5.2. *Sea $f \in A^2(\mathbb{D})$. Si su representación como serie de potencias es $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $\forall\, z \in \mathbb{D}$, entonces*

$$\langle f, z^n \rangle = \frac{\pi}{n+1}\, a_n, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}_0. \tag{4.17}$$

Demostración. Sea $j \in \mathbb{N}$. Para calcular el j-ésimo coeficiente de Fourier, aproximemos la integral en $\mathbb{D}$ a través de una integral sobre D_r, con $0 < r < 1$.

Fijemos $0 < r < 1$. Como f es analítica en $\overline{D_r}$, la serie

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

converge uniformemente en D_r. Además, $|f(z)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n = f(r)$ y D_r tiene medida finita. Utilizando entonces el teorema de convergencia dominada y el lema 4.5.1, obtenemos que

$$\begin{aligned} \int_{D_r} f(z)\, \overline{z}^j\, dm &= \int_{D_r} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right) \overline{z}^j\, dm \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{D_r} z^n\, \overline{z}^m\, dm \\ &= a_j \left(\frac{\pi r^{2(j+1)}}{j+1} \right). \end{aligned}$$

Consideremos la sucesión de conjuntos medibles y anidados $A_k = D_{1-1/k}$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$. Como $\cup_{k\in\mathbb{N}} A_k = \mathbb{D}$, de la proposición 3.3.1, se sigue que

$$\begin{aligned} \langle f, z^j \rangle &= \int_{\mathbb{D}} f(z)\, \overline{z}^j\, dm \\ &= \lim_{k\to\infty} \int_{A_k} f(z)\, \overline{z}^m\, dm \\ &= \lim_{k\to\infty} a_j \left(\frac{\pi(1-1/k)^{2(j+1)}}{j+1)} \right) \\ &= \frac{\pi}{j+1}\, a_j. \end{aligned}$$

□

Teorema 4.5.1. *La familia* $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}_0} \subset A^2(\mathbb{D})$ *dada por*

$$e_n(z) = \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} z^n, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}_0, \tag{4.18}$$

es una base ortonormal de $A^2(\mathbb{D})$.

Demostración. Primero calculemos $\langle e_n, e_m\rangle$ a través del lema 4.5.1. Se tiene que,

$$\begin{aligned}\langle e_n, e_m\rangle \quad &= \int_{\mathbb{D}} e_n(z)\,\overline{e_m(z)}\,dm \\ &= \sqrt{\frac{n+1}{\pi}}\sqrt{\frac{m+1}{\pi}} \int_{\mathbb{D}} z^n \overline{z}^m\,dm \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m, \\ 1 & \text{si } n = m. \end{cases}\end{aligned}$$

Esto verifica que $\{e_n\}$ es un conjunto ortonormal.

Tomemos $f \in A^2(\mathbb{D})$. Puesto que f es analítica en $\mathbb{D}$, la función f tiene una representación como serie de potencias en $\mathbb{D}$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \qquad \forall\, z \in \mathbb{D}. \tag{4.19}$$

De acuerdo al lema 4.5.2, para $n \in \mathbb{N}_0$,

$$\langle f, e_n\rangle = \sqrt{\frac{n+1}{\pi}}\langle f, z^n\rangle = \sqrt{\frac{\pi}{n+1}} a_n. \tag{4.20}$$

Por lo tanto, si $\langle f, e_n\rangle = 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}_0$, entonces $a_n = 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}_0$. Al ser estos los coeficientes de la serie de Taylor de f, se sigue que $f = 0$. De la proposición 2.7.1 concluimos que $\{e_n\}$ es una base ortonormal de $A^2(\mathbb{D})$. □

Ahora que disponemos de una base ortonormal de $A^2(\mathbb{D})$, es sencillo dar una fórmula para el núcleo de Bergman, como lo muestra el siguiente corolario.

Corolario 4.5.1. *El núcleo de Bergman de* $\mathbb{D}$ *es la función*

$$K(z, w) = \frac{1}{\pi(1 - z\,\overline{w})^2}, \qquad \forall\, z, w \in \mathbb{D}. \tag{4.21}$$

Demostración. Sea $\{e_n\}$ la base ortonormal de $A^2(\mathbb{D})$ del teorema 4.5.1. Fijemos $z, w \in \mathbb{D}$. Por el teorema 4.3.1, el núcleo de Bergman de $\mathbb{D}$ tiene la siguiente representación:

$$\begin{aligned}K(z, w) &= \sum_{n=0}^{\infty} e_n(z)\,\overline{e_n(w)} \\ &= \frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n\,\overline{w}^n.\end{aligned}$$

A fin de calcular la serie anterior, notemos que la función

$$g(z) = \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \qquad \forall\, z \in \mathbb{D}$$

es analítica en $\mathbb{D}$. Luego, de acuerdo al teorema 1.5.1,

$$g'(z) = \frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1}, \qquad \forall\, z \in \mathbb{D}.$$

Por otra parte tenemos que $z\,\overline{w} \in \mathbb{D}$. Por lo tanto, al sustituir en la representación del núcleo concluimos que

$$K(z,w) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1) z^n\,\overline{w}^n = \frac{1}{\pi}\frac{1}{(1-z\,\overline{w})^2}.$$

□

4.6. Invariancia conforme

Cuando dos dominios Ω y Θ son conformemente equivalentes, geométricamente entendemos que Ω se puede deformar en Θ bajo ciertas condiciones de regularidad; la más importante de ellas es que se preserven los ángulos entre curvas. A nivel de los espacios de Bergman, esta semejanza geométrica se refleja en un isomorfismo de espacios de Hilbert, que demostramos en seguida.

Teorema 4.6.1. *Sean Ω y Θ dos dominios del plano complejo. Si existe una biyección conforme $\varphi : \Omega \to \Theta$, entonces $A^2(\Omega)$ y $A^2(\Theta)$ son isomorfos como espacios de Hilbert.*

Además, si $J(\zeta,\omega)$ es el núcleo de Bergman de Θ, entonces el núcleo de Ω es

$$K(z,w) = \varphi'(z) J(\varphi(z),\varphi(\omega))\overline{\varphi'(w)}, \qquad \forall\, z,w \in \Omega. \tag{4.22}$$

Demostración. Primero estableceremos el isomorfismo entre los espacios. La biyección conforme induce el operador

$$T_\varphi f := (f\circ\varphi)\varphi', \qquad \forall\, f \in A^2(\Theta).$$

Para $f \in A^2(\Theta)$ tenemos que $(f\circ\varphi)\varphi'$ es analítica. Y por el teorema de cambio de variable,

$$\begin{aligned} \|f\|^2_{A^2(\Theta)} &= \int_\Theta |f(\omega)|^2\; dm \\ &= \int_\Omega |f(\varphi(z))|^2\,|\varphi'(z)|^2\; dm \\ &= \|T_\varphi f\|^2_{A^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $f \in A^2(\Omega)$, y

$$T_\varphi : A^2(\Theta) \to A^2(\Omega)$$

es una isometría lineal con inversa $T_\varphi^{-1} g = (g \circ \varphi^{-1})(\varphi^{-1})'$. Se sigue que T_φ es un operador unitario, que establece un isomorfismo de espacios de Hilbert entre $A^2(\Omega)$ y $A^2(\Theta)$.

Para probar la invariancia del núcleo, sea $\{e_n\}$ una base ortonormal de $A^2(\Theta)$. Para simplificar la notación supongamos que es numerable. Dado que T es un operador unitario, la proposición 2.8.1 implica que $\{Te_n\}$ es una base ortonormal de $A^2(\Omega)$. Luego, del corolario 4.5.1 obtenemos que

$$\begin{aligned} \varphi'(z) J(\varphi(z), \varphi(w)) \overline{\varphi'(w)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \varphi'(z) e_n(\varphi(z)) \overline{e_n(\varphi(w)) \varphi'(w)} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} Te_n(z)\, \overline{Te_n(w)}. \end{aligned}$$

La última expresión es la representación del núcleo de Ω respecto a la base ortonormal de $\{Te_n\}$, entonces se verifica lo afirmado. $\square$

El teorema anterior muestra que si $\varphi : \Omega \to \Theta$ es una biyección conforme, entonces existe un isomorfismo $T_\varphi : A^2(\Theta) \to A^2(\Omega)$. De acuerdo a la proposición 2.3.3, T_φ induce un isomorfismo entre los espacios duales, a través del operador transpuesto

$$T'_\varphi : A^2(\Omega)^* \to A^2(\Theta)^*.$$

Por la construcción del núcleo de Bergman, los funcionales de evaluación tienen un rol central en los espacios de Bergman. Para $w_0 \in \Omega$ se definió

$$\delta_{w_0}(f) = f(w_0), \qquad \forall\, f \in A^2(\Omega).$$

Principalmente, nos interesa determinar si el funcional δ_{w_0} es distinto de cero.

Proposición 4.6.1. *Sean Ω y Θ dos dominios del plano complejo y $\varphi : \Omega \to \Theta$ una biyección conforme entre ellos. Si $w_0 \in \Omega$, entonces el funcional $\delta_{w_0} = 0$ si, y sólo si, $\delta_{\varphi(w_0)} = 0$.*

Demostración. Observemos que para $f \in A^2(\Theta)$

$$\begin{aligned} T'_\varphi \delta_{w_0}(f) &= \delta_{w_0}(T_\varphi f) \\ &= \delta_{w_0}((f \circ \varphi)\varphi') \\ &= f(\varphi(w_0))\varphi'(w_0) \\ &= \varphi'(w_0)\delta_{\varphi(w_0)}(f). \end{aligned}$$

Entonces,

$$T'_\varphi \delta_{w_0} = \varphi'(w_0)\delta_{\varphi(w_0)}. \tag{4.23}$$

Dado que T'_φ es un isomorfismo y que $\varphi' \neq 0$, de (4.23) se sigue que

$$\delta_{w_0} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \delta_{\varphi(w_0)} = 0.$$

$\square$

Siguiendo el ejemplo de los funcionales de evaluación, aprovechamos la invariancia conforme para trasladar propiedades de un espacio de Bergman sencillo hacia otros más complicados. En lo que resta de la sección, los enfocaremos en los resultados que se hereden del espacio $A^2(\mathbb{D})$.

Supongamos que Ω es un dominio propio simplemente conexo. El teorema del mapeo de Riemann asegura que, en este caso, existe una biyección conforme $\varphi : \Omega \to \mathbb{D}$. Para esta situación, el siguiente corolario presenta una base ortonormal para $A^2(\Omega)$, así como al núcleo de Bergman de Ω.

Corolario 4.6.1. *Sea Ω un dominio propio y simplemente conexo. Si $\varphi : \Omega \to \mathbb{D}$ es una biyección conforme, entonces se tiene lo siguiente:*

I. Una base ortonormal para $A^2(\Omega)$ está dada por

$$u_n(z) = \sqrt{\frac{n+1}{\pi}}\,(\varphi(z))^n\,\varphi'(z), \qquad \forall\, z \in \Omega. \tag{4.24}$$

II. El núcleo de Bergman de Ω es

$$K(z,w) = \frac{\varphi'(z)\,\overline{\varphi'(w)}}{\pi(1-\varphi(z)\,\overline{\varphi(w)})^2}. \tag{4.25}$$

Demostración. I. Sea $T_\varphi : A^2(\mathbb{D}) \to A^2(\Omega)$ el operador unitario inducido por la biyección conforme φ. Este operador fue introducido en la demostración del teorema 4.6.1, y se definición como

$$T_\varphi f = (f \circ \varphi)\varphi', \qquad \forall\, f \in A^2(\mathbb{D}).$$

Sea $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la base ortonormal para $A^2(\mathbb{D})$ del teorema 4.5.1,

$$e_n(\zeta) = \sqrt{\frac{n+1}{\pi}}\zeta^n, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}_0.$$

De acuerdo a la proposición 2.8.1, $\{Te_n\} = \{u_n\}$ es una base ortonormal de $A^2(\Omega)$.

II. En el teorema 4.3.1, se demostró que el núcleo de Bergman de $\mathbb{D}$ es la función

$$J(\zeta,\omega) = \frac{1}{\pi(1-\zeta\,\overline{\omega})^2}.$$

Basta sustituir en la igualdad (4.22). □

Previamente habíamos establecido una relación entre los funcionales de evaluación de dominios conformemente equivalentes. El siguiente corolario es para el caso correspondiente al disco unitario.

Corolario 4.6.2. *Sea Ω un dominio del plano complejo propio y simplemente conexo. Si $w_1, \ldots, w_n \in \Omega$ son puntos distintos y $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$, entonces el conjunto*

$$M = \{f \in A^2(\Omega) \,|\, f(w_j) = \alpha_j,\, j = 1, \ldots n\} = \cap_{i=1}^n \delta_{w_j}^{-1}(\alpha_j),$$

es no-vacío, donde δ_{w_j} es el funcional de evaluación correspondiente. En particular, el funcional δ_{w_1} no se anula.

Demostración. Primero observemos que al ser Ω un dominio propio y simplemente conexo, por el teorema del mapeo de Riemann existe una biyección $\varphi : \Omega \to \mathbb{D}$.

Dado que $\mathbb{D}$ es acotado, existe un polinomio $p \in A^2(\mathbb{D})$ tal que

$$p(\varphi(w_j)) = \alpha_j / \varphi'(w_j), \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Luego, por la proposición 4.6.1, para $j = 1, \ldots, n$ se cumple que

$$\begin{aligned} \delta_{w_j} &= \varphi'(w_j)\delta_{\varphi(w_j)}(p) \\ &= \varphi'(w_j)p(\varphi(w_j)) \\ &= \alpha_j. \end{aligned}$$

Lo cual prueba lo deseado. □

Ejemplo 4.6.1. En la sección 1.6 se demostró que la trasformación de Cayley, $\varphi : \mathbb{H} \to \mathbb{D}$ dada por

$$\varphi(z) := \frac{i - z}{i + z}, \qquad \forall\, z \in \mathbb{H},$$

es una biyección conforme.

Siguiendo el corolario 4.6.1, el núcleo de Bergman de $\mathbb{H}$ es

$$\begin{aligned} K(z, w) &= \varphi'(z)\,\overline{\varphi'(w)}\,\frac{1}{\pi(1 - \varphi(z)\,\overline{\varphi(w)})^2} \\ &= \frac{-4}{(i + z)^2(-i + \overline{w})^2}\,\frac{1}{\pi(1 - \frac{i-z}{i+z}\,\frac{-i-\overline{w}}{-i+\overline{w}})^2} \\ &= \frac{-4}{\pi(-2i(z - \overline{w}))^2} \\ &= \frac{1}{\pi(z - \overline{w})^2}. \end{aligned}$$

Usando la fórmula reproductora, se sigue que para todo $f \in A^2(\mathbb{H})$

$$f(z) = \int_{\mathbb{H}} \frac{f(w)}{\pi(z - \overline{w})^2}\,dm(w), \qquad \forall\, z \in \mathbb{H}.$$

El semiplano superior es un buen ejemplo porque tenemos la transformación de Cayley; sin embargo, esta no es la situación más común. Al contrario, para un dominio Ω propio y simplemente conexo no conocemos explícitamente una biyección conforme $\varphi : \Omega \to \mathbb{D}$, salvo en algunos casos especiales. Afortunadamente, el teorema del mapeo de Riemann no sólo asegura que Ω y $\mathbb{D}$ son conformemente equivalentes. También afirma que, para cada $w_0 \in \Omega$, existe una única biyección conforme $\varphi : \Omega \to \mathbb{D}$ tal que $\varphi(w_0) = 0$ y $\varphi'(w_0) > 0$. Como consecuencia, obtenemos una expresión de φ en términos del núcleo de Bergman de Ω.

Corolario 4.6.3. *Sea $w_0 \in \Omega$ fijo. Si K es el núcleo de Bergman de Ω y $\varphi : \Omega \to \mathbb{D}$ es una biyección conforme tal que $\varphi(w_0) = 0$ y $\varphi'(w_0) > 0$, entonces*

$$\varphi'(z) = \sqrt{\frac{\pi}{K(w_0, w_0)}} K(z, w_0). \tag{4.26}$$

Demostración. En el corolario 4.6.1 se obtuvo una representación del núcleo de Bergman de Ω:

$$K(z, w_0) = \frac{\varphi'(z)\,\overline{\varphi'(w_0)}}{\pi(1 - \varphi(z)\,\overline{\varphi(w_0)})^2}.$$

Usando que $\varphi(w_0) = 0$ y $\varphi'(w_0) > 0$, tenemos que

$$\pi K(z, w_0) = \varphi'(z)\,\overline{\varphi'(w_0)} = \varphi'(z)\varphi'(w_0). \tag{4.27}$$

Y en particular:

$$\pi K(w_0, w_0) = (\varphi'(w_0))^2. \tag{4.28}$$

Para obtener la conclusión, basta despejar $\varphi'(z)$ de (4.28) y (4.27):

$$\varphi'(z) = \pi \sqrt{\frac{1}{\pi K(w_0, w_0)}} K(z, w_0) = \sqrt{\frac{\pi}{K(w_0, w_0)}} K(z, w_0).$$

□

Para finalizar la sección, estudiemos el papel que tiene un mapeo conforme $\varphi : \Omega \to \mathbb{D}$ en $A^2(\Omega)$, para un dominio Ω propio y simplemente conexo, Desde una perspectiva geométrica, la respuesta está ligada al problema de minimización del teorema 4.4.1.

Fijemos $w_0 \in \Omega$ y retomemos el planteamiento del problema de minimización. Fijemos $w_0 \in \Omega$ y sea

$$M_c := \{f \in A^2(\Omega) \,|\, f(w_0) = c\},$$

donde $c \neq 0$ es una constante. Dado que Ω es simplemente conexo, el teorema 1.6.2 implica que para cada $f \in M_c$ existe una única función analítica $F : \Omega \to \mathbb{C}$ tal que $F(w_0) = 0$ y $F' = f$. Denotemos

$$\Omega_f := F(\Omega),$$

el cual es un dominio del plano complejo. En efecto, dado que $F' = f \in M_c$, la transformación F no es constante. Luego, por el teorema 1.6.1, Ω_f es un abierto no-vacío. Y como Ω es conexo y F continua, entonces Ω_f también es conexo.

Supongamos ahora que F es inyectiva, entonces F es una biyección entre Ω y Ω_f. Por el teorema de cambio de variable obtenemos una interpretación de la norma en $A^2(\Omega)$:

$$\|f\|^2_{A^2(\Omega)} = \int_\Omega |f|^2 \, dm = m(\Omega_f). \tag{4.29}$$

Con esta motivación, consideremos el problema de minimización del área de la imagen de Ω bajo la antiderivada de $f \in M$:

$$\text{mín}\{m(\Omega_f) \mid f \in M_c,\ F \text{ inyectiva}\}. \tag{4.30}$$

De acuerdo a (4.29), (4.30) coincide con

$$\text{mín}\{\|f\|^2_{A^2(\Omega)} \mid f \in M_c,\ F \text{ inyectiva}\}. \tag{4.31}$$

Observemos que el problema de minimización (4.31) es un caso más específico del que hemos estudiado en esta sección:

$$\text{mín}\{\|f\|^2_{A^2(\Omega)} \mid f \in M_c\}. \tag{4.32}$$

Tomemos $c = \sqrt{\pi K(w_0, w_0)}$. Por el teorema 4.4.1, la solución a (4.32) es la función

$$z \mapsto \sqrt{\frac{\pi}{K(w_0, w_0)}} K(z, w_0).$$

Por otra parte, en el corolario 4.6.3 se prueba que la biyección conforme $\varphi : \Omega \to \mathbb{D}$ tal que $\varphi(w_0) = 0$ y $\varphi'(w_0) > 0$ satisface que

$$\varphi'(z) = \sqrt{\frac{\pi}{K(w_0, w_0)}} K(z, w_0), \qquad \forall\, z \in \Omega.$$

Por lo tanto $\varphi' \in M_c \subset A^2(\Omega)$ y es la solución a (4.32). Sabemos que $\varphi : \Omega \to \mathbb{D}$ es una biyección, entonces φ' también es la solución al problema de minimización (4.31). Concluimos que

$$\text{mín}\{m(\Omega_f) \mid f \in M_c,\ F \text{ inyectiva}\} = m(\Omega_{\varphi'}) = m(\mathbb{D}) = \pi.$$

En general, concluimos que el disco unitario $\mathbb{D} = \Omega_\varphi$ minimiza el área de la imagen Ω_f, cuando $F' \in A^2(\Omega)$ y F es inyectiva.

4.7. Espacios de Bergman en el disco unitario

En lo sucesivo, nos enfocaremos a estudiar los espacios de Bergman con dominio el disco unitario, $A^p(\mathbb{D})$. Primero se estudiará la relación entre los espacios de Bergman y otros espacios de funciones. Denotaremos por $\mathcal{P}(\mathbb{D})$ al espacio de funciones polinómicas en $\mathbb{D}$, y por $\mathcal{C}(\mathbb{D})$ al espacio de funciones continuas en $\mathbb{D}$.

Observemos que el disco unitario es un conjunto acotado. Esta propiedad tiene dos consecuencias, centrales en lo sucesivo:

I. $\mathcal{P}(\mathbb{D}) \subset A^p(\mathbb{D})$,

II. $A^p(\mathbb{D}) \subset A^q(\mathbb{D})$ si $1 \leq q < p \leq \infty$.

Es destacable que, en particular, $\mathcal{P}(\mathbb{D}) \subset A^2(\mathbb{D})$; pues la conjunción de la geometría del disco, con la estructura de espacio de Hilbert, ha dado varias propiedades, que en este caso son válida para los polinomios. A continuación, se probará que los polinomios son densos en $A^p(\mathbb{D})$, lo que permitirá generalizar los resultados de $A^2(\mathbb{D})$ a $A^p(\mathbb{D})$

Para demostrar la densidad de los polinomios, se necesitan algunos resultados preliminares.

Dada una función $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$, para $0 < \rho < 1$, definamos la *dilatación de f por el factor ρ* como

$$f_\rho(z) = f(\rho z), \qquad \forall\, z \in \mathbb{D}.$$

Lema 4.7.1. *Sea $1 \leq p < \infty$ Si $f \in C(\mathbb{D}) \cap L^p(\mathbb{D})$, entonces $f_\rho \to f$ en $L^p(\mathbb{D})$, cuando $\rho \to 1$.*

Demostración. Observemos que para $0 < r < 1$,

$$\begin{aligned} \|f - f_\rho\|_p^p &= \int_{\mathbb{D}} |f - f_\rho|^p \; dm \\ &= \int_{\overline{D}_r} |f - f_\rho|^p \; dm + \int_{\mathbb{D}\setminus\overline{D}_r} |f - f_\rho|^p \; dm. \end{aligned}$$

El objetivo es estimar $\|f - f_\rho\|_p^p$ acotando primero las dos integrales anteriores. Tomemos $\varepsilon > 0$.

Por la convexidad de la función x^p en $[0, \infty)$, tenemos que

$$|f - f_\rho|^p \leq (|f| + |f_\rho|)^p \leq 2^{p-1} \left(|f|^p + |f_\rho|^p\right).$$

De la desigualdad anterior y el teorema de cambio de variable se sigue que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{D}\setminus\overline{D}_r} |f - f_\rho|^p \; dm &\leq 2^{p-1} \left(\int_{\mathbb{D}\setminus\overline{D}_r} |f|^p \; dm + \int_{\mathbb{D}\setminus\overline{D}_r} |f_\rho|^p \; dm \right) \\ &\leq 2^{p-1} \left(\int_{\mathbb{D}\setminus\overline{D}_r} |f|^p \; dm + \frac{1}{\rho} \int_{\rho\mathbb{D}\setminus\overline{D}_{\rho r}} |f|^p \; dm \right). \end{aligned}$$

Considerando $\rho \geq 1/2$, se tiene que $\mathbb{D} \setminus \overline{D}_r \subset \mathbb{D} \setminus \overline{D}_{r/2}$ y $\rho\mathbb{D} \setminus \overline{D}_{\rho r} \subset \mathbb{D} \setminus \overline{D}_{r/2}$, de esta forma se sigue que

$$\int_{\mathbb{D}\setminus\overline{D}_r} |f - f_\rho|^p \; dm \leq 2^{p+1} \int_{\mathbb{D}\setminus\overline{D}_{r/2}} |f|^p \; dm. \tag{4.33}$$

Para realizar la aproximación, observando que $\overline{D}_{1-\frac{1}{n}} \subset \overline{D}_{1-\frac{1}{n+1}}$, resulta que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\overline{D}_{1-\frac{1}{n}}} |f|^p \; dm = \int_{\mathbb{D}} |f|^p \; dm.$$

Entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\int_{\mathbb{D}\setminus\overline{D}_{1-\frac{1}{N}}} |f|^p \ dm = \int_{\mathbb{D}} |f|^p \ dm - \int_{\overline{D}_{1-\frac{1}{N}}} |f|^p \ dm \leq \epsilon/2^{p+2}.$$

De esto junto con (4.33) obtenemos que si $r_0 = 1 - \frac{1}{N}$, entonces

$$\int_{\mathbb{D}\setminus\overline{D}_{r_0}} |f - f_\rho|^p \leq \varepsilon/2. \tag{4.34}$$

Por otra parte, la función f es uniformemente continua en $\overline{D}_{r_0}$. Entonces existe $0 < \delta < 1$ tal que

$$|z - w| \leq \delta \qquad \Rightarrow \qquad |f(z) - f(w)| \leq \left(\varepsilon/2\pi r_0^2\right)^{1/p}. \tag{4.35}$$

Tomemos $\rho \geq \text{máx}\, 1 - \delta$. Entonces

$$|z - z\rho| = |z|\,|1 - \rho| \leq 1 - \rho \leq \delta, \qquad \forall\, z \in \mathbb{D}.$$

Por lo cual, (4.35) implica que

$$|f(z) - f_\rho(z)| \leq \left(\varepsilon/2\pi r_0^2\right)^{1/p}, \qquad \forall\, z \in \overline{D}_{r_0}.$$

Luego,

$$\int_{\overline{D}_{r_0}} |f(z) - f_\rho(z)|^p \ dm \leq \varepsilon/2. \tag{4.36}$$

Tomando en cuenta la condición sobre ρ impuesta en (4.33), sea $\text{máx}\{\frac{1}{2}, 1 - \delta\} \geq \rho < 1$. De (4.34) y (4.36) concluimos que

$$\|f - f_\rho\|_p^p \leq \varepsilon,$$

que prueba lo afirmado. □

Teorema 4.7.1. *El espacio $\mathcal{P}(\mathbb{D})$ es denso en $A^p(\mathbb{D})$, con $1 \leq p < \infty$.*

Demostración. Recordemos que $A^p(\mathbb{D}) \subset (\mathcal{C}(\mathbb{D}) \cap L^p(\mathbb{D}))$. Así que, el lema 4.7.1 implica que basta probar lo siguiente: para cada $f \in A^p(\mathbb{D})$ y $0 < \rho < 1$, existe una sucesión de polinomios convergente a f_ρ.

Sea $f \in A^p(\mathbb{D})$ y fijemos $0 < \rho < 1$. Puesto f_ρ es analítica en $D_{1/\rho}$, por el lema 1.5.2, la serie de Taylor de f_ρ:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

converge absolutamente y uniformemente en $\overline{\mathbb{D}} \subset D_{1/\rho}$.

Sea

$$P_k(z) := \sum_{n=0}^{k} a_n z^n.$$

Entonces la sucesión de polinomios $\{P_k\} \subset \mathcal{P}(\mathbb{D})$ converge uniformemente en $\overline{\mathbb{D}}$ a f_ρ. Notemos que al ser funciones continuas en un conjunto compacto, entonces están acotadas en $\overline{\mathbb{D}}$. En particular, $\{P_k\} \subset L^\infty(\mathbb{D})$ y $f_\rho \in L^\infty(\mathbb{D})$. Así mismo, la convergencia uniforme implica que $P_k \to f_\rho$ en $L^\infty(\mathbb{D})$. En la proposición 3.5.1 se demostró que la inclusión $i : L^\infty(\mathbb{D}) \hookrightarrow L^p(\mathbb{D})$ es continua. Por lo cual, se sigue que $P_k \to f_\rho$ en $L^p(\mathbb{D})$. □

4.8. La proyección de Bergman

Recordemos que el núcleo de Bergman de $\mathbb{D}$ es

$$K(z,w) = \frac{1}{\pi(1 - z\,\overline{w})^2}, \qquad \forall\, z, w \in \mathbb{D}.$$

Esta función también corresponde al núcleo de un operador integral de $L^2(\mathbb{D})$, el cual está fuertemente relacionado con el espacio $A^2(\mathbb{D})$. La proposición 4.2.2 afirma que el operador $B : L^2(\mathbb{D}) \to L^2(\mathbb{D})$, dado por

$$Bf(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{f(w)}{\pi(1 - z\,\overline{w})^2}\, dm(w), \qquad \forall\, z \in \mathbb{D},\ \forall\, f \in L^2(\mathbb{D}), \tag{4.37}$$

es la proyección ortogonal de $L^2(\mathbb{D})$ sobre $A^2(\mathbb{D})$.

Observemos que al fijar $z \in \mathbb{D}$, el núcleo K se acota por

$$\left| \frac{1}{\pi(1 - z\,\overline{w})^2} \right| \le \frac{1}{\pi(1 - |z|)^2}, \qquad \forall\, w \in \mathbb{D}. \tag{4.38}$$

Tomemos $f \in L^1(\mathbb{D})$ y $z \in \mathbb{D}$ fijo. De (4.38) tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{D}} \left| \frac{f(w)}{(1 - z\,\overline{w})^2} \right| dm(w) &\le \int_{\mathbb{D}} \frac{|f(w)|}{(1 - |z|)^2}\, dm(w) \\ &= \frac{1}{(1 - |z|)^2} \int_{\mathbb{D}} |f|\, dm \\ &< \infty. \end{aligned}$$

Por la proposición 3.5.1, $L^p(\mathbb{D}) \subset L^1(\mathbb{D})$ para $1 \le p \le \infty$. Entonces, la estimación anterior indica que podemos definir puntualmente un operador B de $L^p(\mathbb{D})$ en $F(\mathbb{D}, \mathbb{C})$, el conjunto de funciones $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$.

Se define el operador integral $B : L^p(\mathbb{D}) \to F(\mathbb{D}, \mathbb{C})$ por

$$Bf(z) := \int_{\mathbb{D}} \frac{f(w)}{\pi(1 - \overline{w}\, z)^2}\, dm(w), \tag{4.39}$$

para todo $z \in \mathbb{D}$ y $f \in L^p(\mathbb{D})$.

Los siguientes lemas buscan probar que B es una proyección de $L^p(\mathbb{D})$ sobre $A^p(\mathbb{D})$, para $1 < p < \infty$. Lo primero que se establecerá es que $Bf \in A^p(\mathbb{D})$, cuando $f \in L^p(\mathbb{D})$.

Lema 4.8.1. *Sea* $1 \leq p < \infty$*. Si* $f \in L^p(\mathbb{D})$*, entonces* Bf *es analítica.*

Demostración. Probaremos que la función

$$Bf(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{f(w)}{\pi(1 - z\,\overline{w})^2}\, dm(w)$$

se expresa como una serie de potencias convergente en $\mathbb{D}$.

Recordemos que para $z, w \in \mathbb{D}$

$$\frac{1}{(1 - z\,\overline{w})^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n\, \overline{w}^n, \tag{4.40}$$

y la serie de potencias converge absolutamente y uniformemente en compactos de $\mathbb{D}$.

Fijemos $z \in \mathbb{D}$. Dado que

$$\left| \frac{f(w)}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n\, \overline{w}^n \right| = \left| \frac{f(w)}{\pi(1 - z\,\overline{w})^2} \right| \leq \frac{|f(w)|}{\pi(1 - |z|)^2},$$

utilizando el teorema de convergencia dominada,

$$\begin{aligned} Bf(z) &= \int_{\mathbb{D}} \frac{f(w)}{\pi(1 - z\,\overline{w})^2}\, dm(w) \\ &= \int_{\mathbb{D}} \frac{f(w)}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n\, \overline{w}^n\, dm(w) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n \frac{n+1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} f(w)\, \overline{w}^n\, dm(w) \end{aligned}$$

Por lo tanto, Bf es una serie de potencias en $\mathbb{D}$, que converge puntualmente para cada $z \in \mathbb{D}$. De la proposición 1.5.1 se sigue que el radio de convergencia de Bf es mayor o igual a 1. Es decir, Bf converge absolutamente y uniformemente en compactos del disco unitario. □

Ahora que se probó que Bf es analítica, falta ver que también es p-integrable. Para realizar la estimación de $\|Bf\|_p$, nos será de utilidad acotar algunas integrales.

Lema 4.8.2. *Para* $0 < t < 1$*, la integral*

$$\int_{\mathbb{D}} (1 - |w|^2)^{-t}\, dm < \infty \tag{4.41}$$

Demostración. Cambiando a coordenadas polares,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{D}} (1 - |w|^2)^{-t}\, dm &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (1 - r^2)^{-t} r\, d\theta\, dr \\ &= \pi \int_1^0 (1 - r^2)^{-t} (-2r)\, dr. \end{aligned}$$

Hacemos el cambio de variable $u = 1 - r^2$, y puesto que $t < 1$, obtenemos que

$$\pi \int_1^0 (1-r^2)^{-t}(-2r)dr = \pi \int_0^1 u^{-t} du = \frac{\pi}{1-t}.$$

□

Lema 4.8.3. *Sea $t \in \mathbb{R}$ tal que $0 < t < 1$. Entonces existe una constante $C > 0$ tal que*

$$\int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|w|^2)^{-t}}{|1-\overline{z}\,w|^2}\, dm(w) \leq C(1-|z|^2)^{-t}. \tag{4.42}$$

Demostración. Por la invariancia rotacional, basta considerar $z = \rho \geq 0$. Consideraremos dos casos: $\rho \leq 1/2$ y $1/2 < \rho < 1$.

i. Supongamos que $|\rho| = \rho \leq 1/2$. En este caso,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|w|^2)^{-t}}{|1-\rho w|^2}\, dm(w) &\leq \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|w|^2)^{-t}}{(1-|\rho|\,|w|)^2}\, dm(w) \\
&\leq \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|w|^2)^{-t}}{(1-|\rho|)^2}\, dm(w) \\
&= (1-|\rho|)^{-t}(1-|\rho|)^{t-2} \int_{\mathbb{D}} (1-|w|^2)^{-t}\, dm(w) \\
&\leq (1-|\rho|)^{-t} 2^{2-t} \int_{\mathbb{D}} (1-|w|^2)^{-t}\, dm(w) \\
&\leq C(1-|\rho|^2)^{-t}.
\end{aligned}$$

con $C = \int_{\mathbb{D}} 2^{2-t} \int_{\mathbb{D}} (1-|w|^2)^{-t}\, dm(w)$, que de acuerdo al lema 4.8.2, converge.

ii. Supongamos que $\rho > 1/2$. Para acotar (4.42), primero trabajamos en $|w| \leq \frac{1}{2\rho}$ y luego en $|w| > \frac{1}{2\rho}$.

Dado que $\frac{1}{2\rho} < 1$, podemos proceder de forma análoga al caso $\rho \leq 1/2$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\int_{|w| \leq \frac{1}{2\rho}} \frac{(1-|w|^2)^{-t}}{|1-\rho w|^2}\, dm(w) &\leq \int_{|w| \leq \frac{1}{2\rho}} \frac{(1-|w|^2)^{-t}}{(1-|\rho|\,|w|)^t(1-|\rho|\,|w|)^{2-t}}\, dm \\
&\leq (1-\rho)^{-t}(1-\rho\frac{1}{2\rho})^{t-2} \int_{|w| \leq \frac{1}{2\rho}} (1-|w|^2)^{-t}\, dm \\
&\leq (1-\rho)^{-t} 2^{2-t} \int_{|w| \leq \frac{1}{2\rho}} (1-|w|^2)^{-t}\, dm(w) \\
&\leq C_0(1-\rho^2)^{-t}.
\end{aligned}$$

Ahora bien, para estimar la integral sobre el anillo $\frac{1}{2\rho} < |w| < 1$, realicemos un cambio de variable a coordenadas polares:

$$\int_{\frac{1}{2\rho}<|w|<1} \frac{(1-|w|^2)^{-t}}{|1-\rho w|^2}\, dm(w) = 2\int_{\frac{1}{2\rho}}^{1} (1-r^2)^{-t} r \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{(1-2\rho r\cos\theta+\rho^2 r^2)} dr. \tag{4.43}$$

Primero demos una cota para la última integral. Utilizando la identidad trigonométrica $\cos\theta = 1-2\sin^2(\theta/2)$ y que $\sin x \geq 2x/\pi$ para $0 < x \leq \pi/2$, tenemos que

$$\begin{aligned} 1+\rho^2 r^2 - 2\rho r\cos\theta &= 1+\rho^2 r^2 - 2\rho r(1-2\sin^2(\theta/2)) \\ &= (1-\rho r)^2 + 4\rho r\sin^2(\theta/2) \\ &\geq (1-\rho r)^2 + 4\rho r\theta^2/\pi. \end{aligned}$$

Además, para $r \geq \frac{1}{2\rho}$, se satisface que $4\rho r\theta^2/\pi^2 \geq 4\rho(\frac{1}{2\rho})\theta^2/\pi^2 = 2\theta^2/\pi^2$ $(\frac{\theta}{1-\rho r})^2 \geq 4\theta^2$. De estas desigualdades se sigue

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{1-2\rho r\cos\theta+\rho^2 r^2} &\leq \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(1-\rho r)^2+4\rho r\theta^2/\pi^2} \\ &= \frac{1}{(1-\rho r)^2}\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1+\frac{2}{\pi^2}(\frac{\theta}{1-\rho r})^2}. \end{aligned}$$

Realizando el cambio de variable $u = \theta/(1-\rho r)$, obtenemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-\rho r)^2}\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1+\frac{2}{\pi^2}(\frac{\theta}{1-\rho r})^2} &= \frac{1}{(1-\rho r)}\int_0^{\frac{2\pi}{1-\rho r}} \frac{du}{1+\frac{2}{\pi^2}u^2} \\ &\leq \frac{1}{(1-\rho r)}\int_0^{\infty} \frac{du}{1+\frac{2}{\pi^2}u^2} \\ &= \frac{1}{(1-\rho r)}\frac{\pi^2}{2\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Entonces, (4.43) está acotada por

$$\frac{\pi^2}{\sqrt{2}}\int_{\frac{1}{2\rho}}^{1} \frac{(1-r^2)^{-t}}{1-\rho r} r\, dr \leq \frac{\pi^2}{\sqrt{2}}\left(\int_0^{\rho} \frac{(1-r^2)^{-t}}{1-\rho r} r\, dr + \int_{\rho}^{1} \frac{(1-r^2)^{-t}}{1-\rho r} r\, dr\right).$$

En la primera integral tenemos que $0 \leq r \leq \rho$, que implica $1-\rho r \leq 1-r^2$. Luego,

$$\begin{aligned} \int_0^{\rho} \frac{(1-r^2)^{-t}}{(1-\rho r)} r dr &\leq \int_0^{\rho} (1-\rho r)^{-t-1} r dr \\ &= \frac{(1-\rho^2)^{-t}}{t} - \frac{1}{t} \\ &\leq \frac{2}{t}(1-\rho^2)^{-t}. \end{aligned}$$

Para la segunda integral, observemos que $r \leq 1$ implica $1-\rho \leq 1-\rho r$, así que,

$$\begin{aligned}\int_\rho^1 \frac{(1-r^2)^{-t}}{1-\rho r} r dr &\leq (1-\rho)^{-1}\int_\rho^1 (1-r^2)^{-t} r dr \\ &= \frac{1}{2}(1-\rho)^{-1}\frac{(1-\rho^2)^{-t+1}}{1-t} \\ &= \frac{1}{2}(1-\rho)^{-1}\frac{(1-\rho^2)^{-t+1}}{1-t} \\ &\leq \frac{1}{2(1-t)}(1-\rho^2)^{-t}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, en este caso (4.42) está acotada por

$$\begin{aligned}&\int_{|w|\leq \frac{1}{2\rho}} \frac{(1-|w|^2)^{-t}}{|1-\rho w|^2}\, dm(w) + \int_{\frac{1}{2\rho}<|w|<1} \frac{(1-|w|^2)^{-t}}{|1-\rho w|^2}\, dm(w) \\ &\qquad \leq C_0(1-\rho^2)^{-t} + \frac{\pi^2}{\sqrt{2}}\left(\frac{2}{t} + \frac{1}{2(1-t)}\right)(1-\rho^2)^{-t} \\ &\qquad = C(1-\rho^2)^{-t}.\end{aligned}$$

□

Teorema 4.8.1. *Sea $1 < p < \infty$. Se cumple lo siguiente:*

I. Si $f \in L^p(\mathbb{D})$, entonces $Bf \in L^p(\mathbb{D})$.

II. $B : L^p(\mathbb{D}) \to L^p(\mathbb{D})$ es un operador acotado.

Demostración. Fijemos $1 < p < \infty$ y sea q su exponente conjugado. Tomemos $f \in L^p(\mathbb{D})$.

Usando el lema 4.8.3 con $t = 1/p$, existe una constante C_0 tal que

$$\int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|w|^2)^{-1/p}}{|1-\overline{w}\, z|^2}\, dm(w) \leq C_0(1-|z|^2)^{-1/p}. \tag{4.44}$$

Por la desigualdad de Hölder y (4.44), para $z \in \mathbb{D}$ tenemos que

$$
\begin{aligned}
\pi\,|P(z)| &\leq \int_{\mathbb{D}} \frac{|f(w)|}{|1-\overline{w}\,z|^2}\,dm(w)\\
&= \int_{\mathbb{D}} (1-|w|^2)^{-1/pq}\frac{|f(w)|}{(|1-\overline{w}\,z|^{1/p}\,|1-\overline{w}\,z|^{1/q})^2}(1-|w|^2)^{1/pq}\,dm(w)\\
&\leq \left(\int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|w|^2)^{-1/p}}{|1-\overline{w}\,z|^2}\,dm(w)\right)^{1/q}\\
&\qquad \left(\int_{\mathbb{D}} \frac{|f(w)|^p\,(1-|w|^2)^{-1/q}}{|1-\overline{w}\,z|^2}\,dm(w)\right)^{1/p}\\
&\leq \quad \Big(C_0(1-|z|^2)\Big)^{-1/pq}\left(\int_{\mathbb{D}} \frac{|f(w)|^p\,(1-|w|^2)^{-1/q}}{|1-\overline{w}\,z|^2}\,dm(w)\right)^{1/p}.
\end{aligned}
$$

Integramos enseguida la estimación anterior. Utilizando el teorema de Tonelli cambiamos el orden de la integración, se tiene

$$
\begin{aligned}
\|Pf\|_p^p &= \int_{\mathbb{D}} |Pf(z)|^p\;dm(z)\\
&\leq C_1 \int_{\mathbb{D}} (1-|z|^2)^{-1/q}\left(\int_{\mathbb{D}} \frac{|f(w)|^p\,(1-|w|^2)^{-1/q}}{|1-\overline{w}\,z|^2}\,dm(w)\right) dm(z)\\
&= C_1 \int_{\mathbb{D}} \frac{|f(w)|^p\,(1-|w|^2)^{-1/q}}{|1-\overline{w}\,z|^2}\left(\int_{\mathbb{D}} (1-|z|^2)^{-1/q}\,dm(z)\right) dm(w)\\
&= C_1 \int_{\mathbb{D}} |f(w)|^p\,(1-|w|^2)^{-1/q}\left(\int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|z|^2)^{-1/q}}{|1-\overline{w}\,z|^2}\,dm(z)\right) dm(w).
\end{aligned}
$$

Utilizamos nuevamente el lema 4.8.3 en la última integral, con $t = 1/q$, entonces

$$
\begin{aligned}
\|Pf\|_p^p &\leq C \int_{\mathbb{D}} |f(w)|^p\,(1-|w|^2)^{1/q}(1-|w|^2)^{-1/q}\,dm(w)\\
&= C\|f\|_p^p.
\end{aligned}
$$

□

Teorema 4.8.2. *Sea $1 < p < \infty$. El operador $B : L^p(\mathbb{D}) \to L^p(\mathbb{D})$ dado por*

$$
Bf(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{f(w)}{\pi(1-z\,\overline{w})^2}, \qquad \forall z \in \mathbb{D},\ \forall f \in L^p(\mathbb{D}),
$$

es una proyección sobre $A^p(\mathbb{D})$, que llamamos proyección de Bergman.

Demostración. En el teorema 4.8.1 se demostró que B es un operador lineal acotado con imagen en $A^p(\mathbb{D})$. Falta probar que $B^2 = B$, y para ello basta ver que

$$Bg = g, \qquad \forall\, g \in A^p(\mathbb{D}).$$

Sea $g \in A^p(\mathbb{D}) \subset A^1(\mathbb{D})$ y fijemos $z \in \mathbb{D}$. Veamos que podemos aproximar $Bg(z)$ con polinomios. Por el teorema 4.7.1, existe una sucesión de polinomios $\{p_n\}$ que converge a g en $A^1(\mathbb{D})$. Es decir,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{D}} |g(w) - p_n(w)|\, dm = 0. \tag{4.45}$$

Para $z \in \mathbb{D}$ fijo, $1/\left|\pi(1 - z\,\overline{w})^2\right| \leq 1/\pi(1-|z|)^2$. Entonces, de (4.45) se sigue que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{D}} \left| \frac{g(w)}{\pi(1 - z\,\overline{w})^2} - \frac{p_n(w)}{\pi(1 - z\,\overline{w})^2} \right| dm(w) = 0.$$

Usando la desigualdad del triángulo se sigue que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{D}} \frac{p_n(w)}{\pi(1 - z\,\overline{w})^2}\, dm(w) = \int_{\mathbb{D}} \frac{g(w)}{\pi(1 - z\,\overline{w})^2}\, dm \tag{4.46}$$

Además, como $\{p_n\} \subset \mathcal{P}(\mathbb{D}) \subset A^2(\mathbb{D})$ y B es la proyección de $L^2(\mathbb{D})$ sobre $A^2(\mathbb{D})$, se tiene que

$$p_n(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{p_n(w)}{\pi(1 - z\,\overline{w})^2}\, dm(w), \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{4.47}$$

Luego, de (4.46) y (4.47):

$$\begin{aligned} Bg(z) &= \int_{\mathbb{D}} \frac{g(w)}{\pi(1 - z\,\overline{w})^2}\, dm(w). \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{D}} \frac{p_n(w)}{\pi(1 - z\,\overline{w})^2}\, dm(w) \\ &= \lim_{n\to\infty} p_n(z). \end{aligned}$$

Finalmente, como la convergencia en $A^1(\mathbb{D})$ implica la convergencia puntal, $p_n(z) \to g(z)$. Por lo tanto $Bg(z) = g(z)$. $\square$

Las propiedades de una proyección, las cuales se enuncian en la proposición 2.3.4, implican que el espacio $L^p(\mathbb{D})$ tiene la siguiente descomposición:

$$L^p(\mathbb{D}) = A^p(\mathbb{D}) \oplus N(B),$$

donde $N(B)$ es el kernel del operador B. Este subespacio se caracteriza como sigue.

Lema 4.8.4. *Sea $B : L^p(\mathbb{D}) \to L^p(\mathbb{D})$ la proyección de Bergman, con $1 < p < \infty$. Sea $f \in L^p(\mathbb{D})$. Entonces, $f \in N(B)$ si, y sólo si,*

$$\int_{\mathbb{D}} f(w)\,\overline{w}^n\,dm = 0, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}_0.$$

Demostración. Sea $f \in N(B)$. Dado que Bf es analítica en $\mathbb{D}$, siguiendo la demostración del lema 4.8.1, tenemos que la serie de potencias

$$Bf(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \left(\frac{n+1}{\pi}\right) \int_{\mathbb{D}} f(w)\,\overline{w}^n\,dm \tag{4.48}$$

converge uniformemente y absolutamente en compactos del disco unitario.

Por el teorema 1.5.1, (4.48) corresponde a la serie de Taylor de Bf.

Teniendo presente lo anterior, $Bf \equiv 0$ si, y sólo si, para cada $n \in \mathbb{N}_0$, el n-ésimo coeficiente de la serie (4.48) es 0. Esto es,

$$\int_{\mathbb{D}} f(w)\,\overline{w}^n\,dm = 0, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}_0.$$

□

Proposición 4.8.1. *Sea $B : L^p(\mathbb{D}) \to L^p(\mathbb{D})$ la proyección de Bergman, con $1 < p < \infty$. Sea $f \in L^p(\mathbb{D})$. Entonces, $f \in N(B)$ si, y sólo si,*

$$\int_{\mathbb{D}} f\,\overline{g}\,dm = 0, \qquad \forall\, g \in A^p(\mathbb{D}). \tag{4.49}$$

Demostración. Primero supongamos que f satisface (4.49). Entonces, en particular

$$\int_{\mathbb{D}} f(w)\,\overline{w}^n\,dm = 0, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

El lema 4.8.4 implica que $f \in N(B)$.

Supongamos ahora que $f \in N(B)$. Sea $g \in A^p(\Omega)$, con representación en serie de potencias

$$g(w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n, \qquad \forall\, w \in \mathbb{D},$$

que converge absolutamente y uniformemente en compactos de $\mathbb{D}$.

Para $0 < r < 1$, el teorema de convergencia dominada y el lema 4.8.4 implican lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\int_{D_r} f\,\overline{g}\,dm &= \int_{D_r} f(w)\,\overline{\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n}\,dm \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \overline{a_n} \int_{D_r} f(w)\,\overline{w}^n\,dm \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Haciendo $r \to 1$, concluimos que

$$\int_{\mathbb{D}} f\,\overline{g}\,dm = 0.$$

□

4.9. Representación del espacio dual

Para finalizar con este introducción a los espacio de Bergman, daremos una representación del espacio dual $A^p(\mathbb{D})$, para $1 < p < \infty$. Nos servirá de base los resultados que hemos obtenido para los espacios $L^p(\mathbb{D})$.

Sea $1 < p < \infty$ y q su exponente conjugado. Para $f \in L^p(\mathbb{D})$ y $g \in L^q(\mathbb{D})$, definimos la función sesquilineal

$$\langle f, g\rangle := \int_{\mathbb{D}} f\,\overline{g}\,dm. \tag{4.50}$$

Con esta notación, recordemos que en la sección 3.7 se definió el funcional inducido por g, como

$$Rg(f) = \langle f, g\rangle.$$

En la sección 3.7 se demostró que $R : L^q(\mathbb{D}) \to L^p(\mathbb{D})^*$ es una isometría. Por lo cual, (4.50) toma el nombre de *apareamiento dual*.

Observemos que por la desigualdad de Hölder,

$$|\langle f, g\rangle| \leq \|f\|_p\,\|g\|_q.$$

Entonces el apareamiento dual es una forma sesquilineal acotada, y se sigue que es continuo en sucesiones, en el sentido que marca la proposición 2.4.1. La continuidad del apareamiento dual indica que se pueden heredar propiedades conocidas en $A^2(\mathbb{D})$, aproximando por polinomios. Esta idea se sigue para demostrar la siguiente proposición.

Proposición 4.9.1. *Sea $1 < p < \infty$ y q su exponente conjugado. Si $f \in L^p(\mathbb{D})$ y $g \in L^q(\mathbb{D})$, entonces*

$$\langle B_p f, g\rangle = \langle f, B_q g\rangle. \tag{4.51}$$

Demostración. Dado que $\mathbb{D}$ tiene medida finita, por la proposición 3.5.2, el espacio $L^\infty(\mathbb{D})$ es denso tanto en $L^p(\mathbb{D})$ como en $L^q(\mathbb{D})$. Entonces existen sucesiones $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{g_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset L^\infty(\mathbb{D})$ tales que $f_n \to f$ en $L^p(\mathbb{D})$ y $g_n \to g$ en $L^q(\mathbb{D})$. Además, la continuidad de la proyección B implica que $Bf_n \to Bf$ en $L^p(\mathbb{D})$. Luego, la continuidad de la forma sesquilineal $\langle\cdot,\cdot\rangle$ implica que

$$\langle Bf_n, g_n\rangle \to \langle Bf, g\rangle. \tag{4.52}$$

Análogamente, tenemos que

$$\langle f_n, Bg_n\rangle \to \langle f, Bg\rangle. \tag{4.53}$$

Notemos que para cada $n \in \mathbb{N}$, $f_n, g_n \in L^\infty(\mathbb{D}) \subset L^2(\mathbb{D})$. Y en el espacio $L^2(\mathbb{D})$, B es una proyección ortogonal, y por lo tanto, un operador autoadjunto. Entonces,

$$\langle Bf_n, g_n \rangle = \langle f_n, Bg_n \rangle. \tag{4.54}$$

De (4.52), (4.53) y (4.54) se sigue lo deseado. □

Dado $g \in A^q(\mathbb{D})$, consideremos $Sg : A^q(\mathbb{D}) \to \mathbb{C}$ dado por

$$Sg(f) := \int_{\mathbb{D}} f\,\overline{g}\,dm, \qquad \forall f \in A^p(\mathbb{D}).$$

Esto es, S es la restricción a $A^q(\mathbb{D})$ de la isometría $R : L^q(\mathbb{D}) \to L^p(\mathbb{D})^*$. Se sigue que $Sg \in A^p(\mathbb{D})^*$ y que S es continua. Así como en el caso del espacio $L^p(\mathbb{D})$, el operador antilineal $S : A^q(\mathbb{D}) \to A^p(\mathbb{D})^*$ es el candidato a ser una biyección, aunque no necesariamente es una isometría.

Que S sea inyectiva se sigue de la ortogonalidad de los monomios, que se probó en la proposición 4.5.1. En efecto, sean $g, h \in A^q(\mathbb{D})$ tales que $Sg = Sh$. Al ser funciones analíticas, sus respectivas series de Taylor

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \qquad h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n,$$

convergen absolutamente y uniformemente en compactos de $\mathbb{D}$. Para cada $k \in \mathbb{N}_0$ consideremos $f_k(z) := z^k$. Luego,

$$\begin{aligned} Sg(f_k) &= \int_{\mathbb{D}} z^k\,\overline{g}\,dm \\ &= \lim_{r\to 1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{\mathbb{D}} z^k\,\overline{z}^n\,dm \\ &= \frac{\pi}{k+1} a_k. \end{aligned}$$

Análogamente, $Sh(f_k) = \frac{\pi}{k+1} b_k$. Entonces $a_n = b_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}_0$, y se sigue que $f = g$.

De esta forma, queda probar que S es suprayectiva y un homeomorfismo. Esto se demuestra en el siguiente proposición.

Teorema 4.9.1. *Sea $1 < p < \infty$ y q su exponente conjugado. Entonces, para cada $\phi \in A^p(\mathbb{D})^*$ existe una única $g \in A^q(\mathbb{D})$ tal que*

$$\phi(f) = \int_{\mathbb{D}} f\,\overline{g}\,dm, \qquad \forall\, f \in A^p(\mathbb{D}). \tag{4.55}$$

Es decir, $A^p(\mathbb{D})^* = A^q(\mathbb{D})$. Además, existe $C > 0$ tal que

$$\|\phi\| \le \|g\|_q \le C\|\phi\|. \tag{4.56}$$

Demostración. Sea $\phi \in A^p(\mathbb{D})^*$. Del teorema de extensión de Hahn-Banach, existe $\Phi \in L^p(\mathbb{D})^*$ tal que $\Phi|_{A^p(\mathbb{D})} = \phi$ y $\|\Phi\| = \|\phi\|$.

Por el teorema 3.7.1, existe $h \in L^q(\mathbb{D})$ tal que

$$\Phi(f) = \int_{\mathbb{D}} f\,\overline{h}\,dm = \langle f, h\rangle, \qquad \forall\, f \in L^p(\mathbb{D}).$$

Consideremos $f \in A^p(\mathbb{D})$, entonces $B_p f = f$. La proposición 4.9.1 implica que

$$\begin{aligned}\phi(f) &= \Phi(f)\\ &= \langle Bf, h\rangle\\ &= \langle h, Bf\rangle\\ &= \int_{\mathbb{D}} f\,\overline{Bh}\,dm.\end{aligned}$$

Tomemos $g = Bh \in A^q(\mathbb{D})$, con lo que se obtiene lo deseado.

Ahora bien, dado que B es un operador lineal acotado, entonces existe $C > 0$ tal que

$$\|g\|_q = \|Bh\| \leq C\|h\|.$$

Teniendo presente que $R : L^q(\mathbb{D}) \to L^p(\mathbb{D})^*$ es una isometría, $\|h\| = \|\phi\|$. Por lo cual, $\|g\|_q \leq C\|\phi\|$. Por otra parte, utilizando la desigualdad de Hölder en (4.55), se sigue que $\|\phi\| \leq \|g\|_q$, lo cual prueba (4.56). $\square$

Bibliografía

[1] N. Aronszajn *Theory of Reproducing Kernels.* Transactions of the American Mathematical Society 68 (1950), no. 3, 337-404.

[2] S. Bergman, *The kernel function and conformal mapping.* Second, revised edition., Mathematical Surveys, No. V., American Mathematical Society, Providence, RI, 1970.

[3] J. A. Canavati, *Introducción al análisis funcional.* Fondo de Cultura Económica, México, 1998.

[4] L. Carleson, *Selected problems on exceptional sets.* D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, 1967.

[5] P. Duren y A. Schuster, *Bergman spaces.* Mathematical Surveys and Monographs, American Mathematical Society, Providence, RI, 2004.

[6] F. Galaz Fontes, *Elementos de análisis funcional.* Centro de Investigación en Matemáticas, México, 2006.

[7] H. Hedenmalm, S. Richter y K. Seip, *Interpolating sequences and invariant subspaces of given index in the Bergman spaces.* J. Reine Angew. Math. 477 (1966), 13-30.

[8] W. Rudin, *Real and complex analysis.* Third Ed., McGraw-Hill, New York, 1987.

[9] J. Wiegerinck, *Domains with finite dimensional Bergman space.* Mathematische Zeitschrift 187 (1984), no. 4, 559-562.

[10] V. P. Zaharjuta y V.I. Judovič, *The general form of a linear functional in* $H_p^{'}$ *(en ruso).* Uspehi Mat. Nauk 19 (1964), no. 2 (116), 139-142.

[11] K. Zhu, *Operator theory in function spaces.* Second E., Mathematical Surveys and Monographs, American Mathematical Society, Providence, RI, 2007.